类别：A 卷试题

# 河南师范大学
# 二〇〇九年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码：362 名称：数学(理) 适用专业或方向：环境科学

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

## 一、 填空题（每小题 3 分，共 30 分）

（1） $z=u^2+v^2$ 而 $u=x+y, v=x-y$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ 4x.

（2） 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\tan x}-1}{\sin x}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\le 0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ 1.

（3） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

（4） $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续是 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导的 必要 条件.

（5） 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$ 且 $f(1)=0$,则 $f(x)=$ $\frac{1}{2}\ln^2 e^x-\frac{1}{2}$.

（6） 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$,则 $f'(0)=$ $\begin{cases} n! & 偶\\ -n! & 奇\end{cases}$.

（7） 设微分方程为 $y''-2y'+5y=0$,则其通解为 $e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

（8） 交换二次积分 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$ 的积分次序后为 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

（9） 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为 2.

（10） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}=$ 0. （$n$ 为正整数，$\lambda>0$）

## 二、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

（11） 已知 $f(x)=\begin{cases} x\tan x, x>0 \\ x^2 g(x), x\le 0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 为有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ C ）

（A）极限不存在　　（B）极限存在但不连续

（C）连续但不可导　　（D）可导

（12） 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（ A ）

（A）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在　　（B）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　（D）$\lim\limits_{h\to +\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在

（13） 设 $f(x)$ 具有连续导数，则 $\int \dfrac{f(x)+xf'(x)}{xf(x)}dx=$（ C ）

（A）$\ln|f(x)|+c$　　（B）$\ln|xf(x)|$

（C）$\ln|xf(x)|+c$　　（D）$\ln\left|\dfrac{x}{f(x)}\right|+c$

（14） 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int xf(x)dx=$（ A ）

（A）$\sin x-\dfrac{2\cos x}{x}+c$　　（B）$\cos x-\dfrac{2\sin x}{x}+c$

（C）$\sin x-\dfrac{2\cos x}{x}$　　（D）$\cos x-\dfrac{2\sin x}{x}$

（15） 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则 $x\to 0$ 时有（ B ）

（A）$f(x)$ 与 $x$ 是等价无穷小　　（B）$f(x)$ 与 $x$ 是同阶但非等价无穷小

（C）$f(x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小　　（D）$f(x)$ 是比 $x$ 低阶的无穷小

（16） 若 $\int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx=\dfrac{1}{2}$，则 $a=$（ A ）

（A）2　　（B）$\dfrac{1}{2}$

（C）0　　（D）1

(17) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 有

（ C ）

（A）不连续、偏导数不存在　　（B）连续、偏导数不存在

（C）偏导数存在，不可微分　　（D）偏导数存在，可微分

(18) 微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的特解 $y^*$ 形如（ A ）

（A）$y^*=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$

（B）$y^*=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$

（C）$y^*=(Ax+B)\cos 2x$

（D）$y^*=(Ax+B)\sin 2x$

(19) $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=2xyz$ 所确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（ D ）

（A）$\dfrac{y-xz}{z-xy}$　（B）$\dfrac{x-yz}{y-xy}$　（C）$\dfrac{xz-y}{z-xy}$　（D）$\dfrac{yz-x}{z-xy}$

$x^2+1$ $3x^2+1$　　$f'(x)g(x)<f(x)g'(x)$

(20) 设 $f(x),g(x)$ 是恒大于零的可导函数且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当

$\overset{1}{a}<\overset{2}{x}<\overset{3}{b}$ 时有（ B ）

（A）$f(x)g(a)>f(a)g(x)$　$\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(a)}{g(a)}$　（B）$f(x)g(b)>f(b)g(x)$　$\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$

（C）$f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　（D）$f(x)g(x)>f(a)g(a)$

## 三、解答题（每小题 10 分，共 9 0 分）

(21) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}$.

(22) 求 $\int\dfrac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$.

(23) 求 $\int x\arctan x dx$.

（24） 设 $f(x)=e^{\tan^k x}$ 且 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=e$，求 $k$ .

（25） 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x dx$ .

（26） 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 $D$ 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.

（27） 求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

（28） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$ 且 $f(0)=1$，证明 $f(x)=e^x$ .

（29） 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin tdt=x+1$，求 $\varphi(x)$ .