试卷编号：B

河南师范大学

二〇一〇年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码：601 名称：数学分析 适用专业或方向：数 学

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一（16分，每小题8分）求下列极限：

1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x^2}$； 2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}$。

二（16 分,每小题 8 分）

1）设 $f(x)$ 对 $(-\infty,+\infty)$ 内一切 x 有 $f(x^2)=f(x)$ 且 f 在 $x=0,1$ 处连续，证明 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为常数.

2）求 $\int\dfrac{1+x^2}{1+x^4}dx$

三（16分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，如果 $f(1)=4\int_0^{\frac{1}{4}}e^{1-x^3}f(x)dx$，

证明（1）至少存在一点 $\eta\in[0,1]$ 使得 $f(1)=e^{1-\eta^3}f(\eta)$

（2）至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=3\xi^2 f(\xi)$。

四（17 分）设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足：

$$|a_n-b_n|\le\frac{M}{n^2},\quad n\ge 1,$$

其中 M 是一个与 n 无关的常数，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛；

如果把上述条件改为 $|a_n-b_n|\le\dfrac{M}{n}$，$n\ge 1$，问结论是否成立，为什么？

五 （17 分）证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (\ln x)^2$ 在 $(0,1)$ 内一致收敛.

六 （17分）设 S 是 $z>0$ 的锥面 $x^2+y^2-z^2=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$;

$x^2+y^2+z^2=4$ 所围立体的表面外侧，求

$$I=\oiint_S x^3 dydz+(\frac{y}{z^2}+y^3)dzdx+(\frac{1}{z}+z^3)dxdy。$$

七 （17 分）设 f,g 具有二阶连续导数，$u=yf(\frac{x}{y})+xg(\frac{y}{x})$，求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

八（17 分）求 $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中 V 是由曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所成的曲面与平面 $z=2, z=8$ 所围成的区域.

九（17 分）证明当 $x>0$ 时，$(1+\frac{x}{n})^n$ 关于自然数 n 单调上升。即证

$$(1+\frac{x}{n})^n \le (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}。$$