试卷编号： A

河南师范大学
二〇一〇年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码： 801 名称： 高 等 代 数 适用专业或方向： 数学各专业

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一（10 分）如果数域 P 上的多项式 $f(x)$ 满足：对任意 $a,b\in P$，有 $f(a+b)=f(a\cdot b)$，试决定出 $f(x)$ 。

二（15 分）计算 n 级行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}，\quad a_2,a_2,\cdots,a_n \text{ 互不相同。}$$

三（15 分）解线性方程组（用基础解系法）

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2+x_3+x_4=2 \\ x_3+x_4+x_5=3 \\ x_4+x_5+x_6=4 \end{cases}$$

四（20 分）用正交线性替换化二次型为标准型.

$$f(x)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2.$$

五（10 分）证明：若秩 $AB=$ 秩 B，则秩 $AB^2=$ 秩 B^2.

六（15 分）设 B 为 3 阶方阵，满足：$A^2B-A-B=E$，E 为单位阵.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}，\text{求 } |B|.$$

七（15 分）设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 V 上的线性变换，且 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$. 证明：$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 至少有一个公共的特征向量.

八（15 分）设方阵 $A=(a_ia_j)_{n\times n}$，a_i,a_j 为数，$i,j=1,2,\cdots,n$，求 A 的特征值。

九（20 分） 设 R 为实数域，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;\alpha_i\neq 0,(i=1,2,\cdots,s)$ 是 R^n 中的向量，当 $i\neq j$ 时，$\alpha_i{}'A\alpha_j=0$ 。证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。其中 $\alpha_i{}'$ 表示转置，A 为下列 n 级方阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

十（15 分）设 $\mathscr{A}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，且 秩 $\mathscr{A}$ = 秩 $\mathscr{A}^2$ ，证明：$V=\mathscr{A}V\oplus\mathscr{A}^{-1}(0)$，$\mathscr{A}^{-1}(0)$表示线性变换的核。