试卷编号：B

河南师范大学
二〇一〇年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码：362 名称：数学 适用专业或方向：环境科学

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一、单项选择题（每小题 4 分，共 32 分）

（1） $\int_{\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx =$（ ）

（A）0 （B）1 （C）2 （D）$\frac{1}{2}$

（2） 若 $f(x) = \sec x - 1$，则当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是（ ）

（A）与 x^2 同阶不等价的无穷小 （B）与 x^2 等价的无穷小

（C）比 x^2 高阶的无穷小 （D）比 x^2 低阶的无穷小

（3） 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1-\sin x)^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a =$（ ）。

（A）1 （B）$\frac{1}{e}$ （C）$-\frac{1}{e}$ （D）e

（4） 设常数 $k > 0$，函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为（ ）。

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

（5） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} =$（ ）。

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

（6） 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 通解为（ ）

（A）$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

(B) $y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

(C) $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

(D) $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

(7) 设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，则$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=$（ ）

(A) k (B) 1 (C) ka (D) a

(8) 设$f(x)$具有连续导数，下面式子正确的是（ ）。

(A) $d\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)dx$ (B) $d\left[\int_a^b f(t)dt\right]=f(x)dx$

(C) $\int f'(x)dx=f(x)$ (D) $\int df(x)=f(x)dx$

二、填空题（每小题 4 分，共 28 分）

(9) 设$f'(a)$存在，则$\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]=$______。

(10) 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界是$f(x)$在$[a,b]$上可积的______条件。

(11) 设$f(x)=\begin{cases}\ln(x+e) & x>0\\ a^{x} & x\le 0\end{cases}$ $(a>0)$，则$a=$______时$f'(0)$存在。

(12) 微分方程$y''+y=x\cos 2x$的特解应设为______。

(13) 改换二次积分$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$积分次序后为______。

(14) 设$f(x)$具有连续导数，则$\int\frac{f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}dx=$______。

(15) 若$f(x)=x(x-1)(2x-1)(3x-1)\cdots(nx-1),(n\in N^{+})$，则$f''(x)$在$(0,1)$内有______个零点。

三、解答题（每小题10分，共90分）

（16） 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\tan t-\sin t)dt}{\int_0^x \sin^3 t dt}$。

（17） 求$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

（18） 求$y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$的导数

（19） 设$f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$，求$\int_0^1 f(x)dx$

（20） 求$\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

（21） 求$\int\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

（22） 计算二重积分$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$其中$D$是由中心在原点，半径为$a$的圆周所围成的闭区域

（23） 设$x^2+y^2+z^2-4z=0$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

（24） 求$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解