试卷编号：A

河南师范大学
二〇一一年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码：701 名称：数学分析 适用专业或方向：数 学

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一、求下列极限（16分，每小题8分）：

1）$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}]$ （其中 $\alpha\in(0,1)$）；

2）$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$。

二、（16分,每小题8分）

1)已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ \frac{1-\cos x^2}{x}, & x<0 \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

2）求 $\int\frac{1}{\sin^3 x\cos x}dx$

三、（16分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，且 $f(x)+f'(x)>0$，证明 $f(x)$ 至多存在一个零点。

四、（17分）设 $a_0=a_1=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2};(n\ge1)$，证明 $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.

五、（17分）设 $[0,1]$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足 $|f_n(x)|\le\min\{1,nx^n\}$，$\forall x\in[0,1]$，$n\ge1$，$g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数且 $g(1)=0$，证明 $\{f_n(x)g(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于零。

六、（17分）求曲面积分 $I=\oiint\limits_{S外}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

其中 S 是 $V=\{(x,y,z):|x|\le 2,|y|\le 2,|z|\le 2,\}$ 的边界.

七.（17 分）设 f 二次可微，$u(x,y,z)=f(r)$，　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$。

八.（17 分）证明 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x+y+1)dxdy=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(\sqrt{2}u+1)du$，其中 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上连续（提示：作旋转变换）

九.（17 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，$f(a)=0$，证明对任意 $x_0\in(a,b)$ 有

$$\int_a^b [f'(x)]^2dx\ge\frac{f^2(x_0)}{x_0-a}。$$