试卷编号：B

河南师范大学
二○一一年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码：601 名称：数学(理) 适用专业或方向：环境科学

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一、填空题（每小题 3 分，共 45 分）

(1) $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时右极限 $f_+(x_0)$ 及左极限 $f_-(x_0)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的________条件。

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的________条件。

(3) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导且在 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0)=$________。

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| =$________。

(5) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且当________时，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$。

(6) 若 $f'(x)$ 连续,则 $\int \dfrac{f(x)+xf'(x)}{xf(x)}dx =$________。

(7) 设 $f(x)=e^{x^2}$，则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(1-\Delta x)-f'(1)}{\Delta x} =$________。

(8) 若 $f(x)$ 的一个原函数为 e^x，则 $\int xf(x)dx =$________。

(9) 若 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，则 $f'(0)=$________。

(10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^{\lambda x}} =$________（$n$ 为正整数，$\lambda > 0$）

(11) $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________条件。

(12) $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________

条件。

(13) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=$________。

(14) 二次积分 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 交换积分次序后的二次积分是____________。

(15) 微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的通解为____________。

二、解答题（每小题 8 分，共 88 分）

(16) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

(17) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.

(18) 设某函数的图形上有拐点 $p(2,4)$，在 p 点处曲线的切线低利率为-3，又知这个函数的二阶导数 $y''=6x+C$。求这个函数。

$C=-24$.

$y'=3x^2+Cx+C_1$

$-3=12-24\times 2+C_1$

$C_1=9$.

$y=$

(19) 设 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$,求 y'.

(20) 设 $y=f(x)$ 由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(21) 求 $\int\frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$.

(22) 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$,而 $y=a\sin x, z=\cos x$,求 $\frac{du}{dx}$.

(23) 计算 $\iint\limits_D xy^2 d\sigma$ 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域.

(24) 计算 $\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

(25) 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$ 的通解.

(26) 注水入深 8m 上顶直径 8m 的正圆锥形容器中，其速率为 $4\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$。当水深 5m 时，其表面上升的速率为多少？

三、论证题（共 17 分）

(27) （8 分）设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试利用柯西中值定理证明存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

(28) (9 分)设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\dfrac{y}{x}$，$F(u)$ 为可导函数.证明: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.