试卷编号：A

河南师范大学
二〇一二年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码：801 名称：高 等 代 数 适用专业或方向：数学各方向

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一、填空题（40 分，每小题 5 分）

1. 若 $p(x)$ 为数域 P 上的不可约多项式，其导数记为 $p'(x)$，则 $p(x)$ 与 $p'(x)$ ________________。

2. 若 A,B 为 3 级矩阵，秩 A=2， $B=\begin{pmatrix}7&8&9\\0&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，则秩$\left(BA^*\right)=$ ____________。

3. 若齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+3kx_3=0\\-x_1+2kx_2-3x_3=0\\kx_1-2x_2+3x_3=0\end{cases}$有非零解，则 $k=$ ____________。

4. 若 A,B 为可逆阵，$Q=\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$，则 $(Q')^{-1}=$ __________，其中 Q' 表示 Q 的转置矩阵。

5. 设 σ 是 V 上线性变换，若 $\sigma\alpha_1,\cdots,\sigma\alpha_r$ 线性无关，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ __________。

6. 已知 n 级矩阵 A 有一个特征值为 1. 则 A^2+A-2E 必有一个特征值为________。

7. 若 A,B 为 $n\times n$ 方阵，$AB=0$，则秩 $A+$ 秩 B _______。

8. 若 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，则 $\dim\sigma^2V+\dim(\sigma^2)^{-1}(0)=$ ________，其中 $\dim\sigma^2V$ 表示 σ^2V 的维数。

二、（15 分）计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2a&b&b&\cdots&b\\b&2a&b&\cdots&b\\b&b&2a&\cdots&b\\&\cdots&&\ddots&\\b&b&b&\cdots&2a\end{vmatrix}。$$

三、(15 分) 判定下列二次型的正定性.

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3.$$

四、(15 分) 证明：在欧氏空间 V 中，若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 两两正交 $(\alpha_i\neq0)$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。

五 (15 分) 在 P^4 中，设 $\alpha_1=(1,2,1,0)$，$\alpha_1=(-1,1,1,1)$，$\beta_1=(2,-1,0,1)$，$\beta_2=(1,-1,3,7)$，$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$W_2=L(\beta_1,\beta_2)$，求 $W_1\cap W_2$ 的一组基及维数。

六（15 分）设 σ 是 n 维线性空间 $V_n(P)$ 上的线性变换，且存在向量 $\xi \in V$，满足：$\sigma^{n-1}\xi \neq 0, \sigma^n \xi = 0$，证明：当 $n>1$ 时，σ 不可对角化。

七 （10）设齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解空间为 V_1，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间为 V_2，证明：$P^n = V_1 \oplus V_2$.

八（15 分）设 $B \in P^{n\times m}, A \in P^{m\times n}$，证明：$|E - AB| = |E - BA|$，其中 E 表示单位矩阵。

九（10 分）设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 + x_2 & x_1 + x_3 & \cdots & x_1 + x_n \\ x_2 + x_1 & 0 & x_2 + x_3 & \cdots & x_2 + x_n \\ x_3 + x_1 & x_3 + x_2 & 0 & \cdots & x_3 + x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n + x_1 & x_n + x_2 & x_n + x_3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, x_i \neq 0. \quad (n>2)$$

证明：秩 $A^* = n$，或 1. 其中 A^* 表示 A 的伴随阵。

以下空白