试卷编号：A 卷试题

河南师范大学
2012 年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码：601 名称：数学（理）适用专业或方向：环境科学

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一、填空题（每小题 3 分，共 45 分）

1. 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为________。

2. $f(x)$ 在 x_0 点可导是 $f(x)$ 在 x_0 点连续的________条件。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=$________。

4. 若 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，且在 x_0 的某领域内 $f(x)$ 具有二阶连续导数，则必有 $f''(x_0)=$________。

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且当________时，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

6. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$____________.

7. 若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)f\left(t+\dfrac{1}{t}\right)dt=$________。

8. 若 $f(x)$ 的一个原函数为 e^x，则 $\int xf(x)dx=$________。

9. $y=f(x)$ 由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定，$\dfrac{dy}{dx}=$________。

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}=$________（$n$ 为正整数，$\lambda>0$）

11. $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是 $f(x,y)$ 在该点连续的________条件。

12. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 的间断点是________。

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=$__________。

14. 二次积分 $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$ 交换积分次序后所成的二次积分是__________。

15. 微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解为__________。

二、解答题（每小题 8 分，共 88 分）

16. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$

17. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$.

18. 设某函数的图形上有拐点 $p(2,4)$，在 p 点处曲线的切线斜率为-3，又知这个函数的二阶导数 $y''=6x+C$,求这个函数。

19. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(x)dx$.

20. 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

21. 求 $\int\tan\sqrt{1+x^2}\,\square\,\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

22. 设 $z=uv+\sin t$,而 $u=e^t,v=\cos t$,求 $\dfrac{dz}{dt}$.

23. 计算 $\iint\limits_D xyd\sigma$ 其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及其直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.

24. 计算 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域.

25. 求微分方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解.

26. 溶液自深 18cm 顶直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中。开始时漏斗中盛满了溶液。已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时，其表面下降的速率为 1cm/min.问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

三、论证题

27. （8 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx .$$

28. (9 分)设 $z = xy + xF(u)$,而 $u=\dfrac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数.证明: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.