

青岛大学 2010 年硕士研究生入学考试试题

科目代码： 880 科目名称： 数学基础综合 (共 2 页)

请考生写明题号，将答案全部答在答题纸上，答在试卷上无效

1 (本题 15 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

2 (本题 15 分) 计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx$.

3 (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义，且函数 $e^x f(x)$ 与 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内都是单调不减的. 试证 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续.

4 (本题 15 分) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. $\forall x \in (a,b)$, $g'(x) \neq 0$. 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}.$$

5 (本题 15 分) 设函数 $y(x)$ ($x \geq 0$) 二阶可导，且 $y'(x) > 0$, $y(0) = 1$. 过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线. 上述两直线与 x 轴所围城的三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 并设 $2S_1 - S_2$ 恒等于 1. 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程.

6 (本题 15 分) 设 $f(x), g(x)$ 是数域 F 上的多项式, $(f(x), g(x))$ 表示 $f(x), g(x)$ 的首 1 最大公因式. 证明:

$$(f(x) + g(x), f(x) - 2g(x)) = (f(x), g(x)).$$

7 (本题 15 分) 设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2 = I_n$, $r(M)$ 表示矩阵 M 的秩, I_n 为 n 阶单位矩阵.

(1) 证明: $r(A + I_n) + r(A - I_n) = n$.

(2) 证明: 存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

8 (本题 15 分) 讨论下列线性方程组解的情况:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + (\lambda^2 - 1)x_4 = \lambda - 3 \end{cases}$$

9 (本题 15 分) 设 F 是数域, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 令 $V = \{X \in F^{2 \times 2} \mid AX = XA\}$.

(1) 证明 V 是 $F^{2 \times 2}$ 的线性子空间.

(2) 求 V 的一个基和维数 $\dim V$.

10 (本题 15 分) 设 F^n 是数域 F 上的 n 维列向量全体构成的线性空间,

$A \in F^{n \times n}$ 且 $A^2 = A$. 令

$$V_1 = \{X \in F^n \mid AX = 0\}, V_2 = \{X \in F^n \mid AX = X\}.$$

证明: $F^n = V_1 \oplus V_2$, 其中 $\oplus$ 表示线性空间的直和.