

青岛大学 2010 年硕士研究生入学考试试题

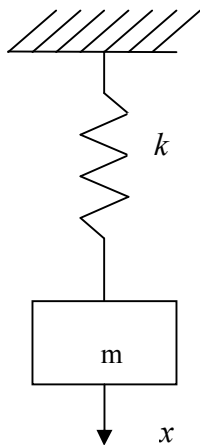
科目代码: 877 科目名称: 常微分方程 (共 2 页)

请考生写明题号, 将答案全部答在答题纸上, 打在试卷上无效

一、填空题 (18 分)

1. 所谓微分方程就是一个或几个联系着_____之间关系的等式。
2. 在微分方程中, 必定含有未知函数的导数项, 其中出现的_____就称为该微分方程的阶数。
3. 对于 n 阶方程 $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, 如果它的解 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ 含有常数 $c_1, c_2, \dots, c_n$, 则称这个解为_____。
4. 对于现行微分方程来说, 其通解就包含了它的_____; 对于非线性方程来说其通解并不一定包含其_____。

二、根据下图建立相应的微分方程 (15 分)



如图所示, 一根弹簧一端固定另一端连接质量为 m 的物体。设弹簧系数是 k , 空气的阻尼系数是 n , 并假设物体的空气阻力与物体的运动速度成正比。试求物体运动的微分方程。

三、回答下列各题 (25 分)

1. 指出下列方程的阶数并判断是否为线性方程

(1) $\frac{dy}{dx} = x^2 - 3y$, (2) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2y\frac{dy}{dx} + 3xy = 0$

2. 什么是常微分方程的特解? 何为初值问题?

3. 写出齐次和非齐次线性微分方程组的一般形式；叙述叠加原理；若 $\varphi_1(x)$

和 $\varphi_2(x)$ 是非齐次线性微分方程组的解，问 $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ 是否仍为该非

齐次线性微分方程组的解？其中 c_1 和 c_2 是常数。

四、叙述初值问题解的存在唯一性定理（Picard 定理）（10）

五、利用变量分离法求解下列方程（20 分）

1. $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$ 2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$

六、判定下列方程是否是全微分方程，并求解。（20 分）

1. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

2. 利用积分因子法求解方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}, (y > 0)$

七、求方程组（14 分）

$x' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$ 的基本解矩阵

八、求解初值问题（14 分）

$x' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \sin t \\ -2 \cos t \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

九、（14 分）给定非线性微分方程组 $x' = f(x)$ 。假设 $f(0) = 0$ 并且向量函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续可微。

1. 何为非线性微分方程组 $x' = f(x)$ 的线性近似方程组？

2. 判定下述非线性方程组的稳定性

$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} x_2^2 \\ x_1^3 x_2 \end{bmatrix}$