

青岛大学 2010 年硕士研究生入学考试试题

科目代码: 615 科目名称: 数学分析 (共 2 页)

请考生写明题号, 将答案全部答在答题纸上, 答在试卷上无效

1. (本题满分 30 分) 求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$, 其中 $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

2. (本题满分 20 分) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 其中 $x_1 = 3, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$,

$n = 1, 2, 3, \dots$; 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3. (本题满分 10 分) 是否存在正实数 a 使得恰好比其立方少 1? 为什么?

4. (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 可导, 且 $f'(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上有界, 证明函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上一致连续.

5. (本题满分 10 分) 设函数 $f(x) > 0$, 在有限区间 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

6. (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内 n 阶可导, 若 $f(x)$ 被 n 阶多项式 $P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$ 逼近, 相差是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小, 证明 n 阶多项式 $P_n(x)$ 是唯一的.

7. (本题满分 30 分) 证明:

$$(1) \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n} \text{ 收敛};$$

$$(2) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}}{(\ln n)^x} \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 一致收敛};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}}{(\ln n)^x} = \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}.$$

8. (本题满分 15 分) 构造一个二元函数, 使得它在原点的两个一阶偏导数都存在, 但该函数在原点不可微, 并说明理由.

9. (本题满分 15 分) 计算曲面积分 $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 S 是

球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ ($R > 0$) 的外侧.