青岛大学 2011 年硕士研究生入学考试试题

科目代码：615 科目名称：数学分析（共 2 页）

请考生写明题号，将答案全部答在答题纸上，答在试卷上无效

一、解下列各题（满分 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\Lambda+\sqrt[n]{n}}{n}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，问函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？是否可导？

二、解下列各题（满分 30 分）

1. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的任意有限闭区间上一致连续.

2. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在有限的极限，则 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

3. 问 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上是否一致连续？为什么？

三、（满分 10 分）设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且在此邻域内有 $f(x)\geq f(x_0)$（或 $f(x)\leq f(x_0)$），并在 x_0 点可导，证明 $f'(x_0)=0$.

四、（满分 10 分）计算 $\int\dfrac{\cos x\cdot\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

五、（满分 20 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续 $(a<b)$，且 $f(x)>0$；又令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$. 证明：（1）$F'(x)\ge 2$；（2）方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个实根.

六、解下列各题（满分 30 分）

1. 判定级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

2. 设 $u_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，$n=1,2,3\Lambda$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 均绝对收敛，证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对收敛且一致收敛.

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域及和函数.

七、解下列各题（满分 20 分）

1. 设 $z=f(x^2-y^2,e^{x+y})$，且 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 计算 $I=\iint_S xdydz+2ydzdx+3zdxdy$，其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截的部分之外侧.