青岛大学 2012 年硕士研究生入学考试试题

科目代码 880 科目名称： 数学基础综合 （共 2 页）

请考生写明题号，将答案全部答在答题纸上，答在试卷上无效

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i(i+1)(i+2)}$．（10 分）

2．用一致连续定义证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b],[b,c]$ 上都一致连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上一致连续．（10 分）

3．设函数 $f:[a,b]\to[a,b]$ 为连续函数．证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$．（10 分）

4．设 $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$，

$$\Delta^2 f(x)=f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x).$$

试求满足方程 $\Delta^2 f(x)\equiv 0$，$\forall x\in\mathbb{R}$ 的连续函数．（10 分）

5．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x<0\\ ax+b, & x\geq 0\end{cases}$

其中 $g''(0)$ 存在，且 $g(0)=1$． a,b 为常数．试确定 a,b 的值，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导，并求出 $f'(0)$．（10 分）

6．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'(a)f'(b)>0$．证明：方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有两个根．（10 分）

7．求 $I=\int \min\left\{|x|,x^2\right\}dx$．（10 分）

8．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续．试证：

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b\left|f'(x)\right|dx.$$（10 分）

9．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$.　（10 分）

10．设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是数域 F 上线性空间 V 中一线性无关的向量组，讨论向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$的线性相关性.（10 分）

11．设A,B为n阶矩阵，A，B，$A+B$均可逆，证明：$A^{-1}+B^{-1}$也可逆，并求其逆.（10 分）

12．证明：$x^d-1\left|x^n-1\right.$的充要条件是$d\left|n\right.$.（10 分）

13．设n阶实对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$. 证明A正定的必要条件是$a_{ii}>0$，$i=1,2,\cdots,n$. 并举例说明这个条件不是A正定的充分条件.（10 分）

14.（每小题 5 分，共 10 分）设 A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

（1）求 A 的特征值和特征向量，（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

15．设ε是n维欧氏空间V的单位向量．定义V上的线性变换

$$\sigma(\alpha)=\alpha-2(\varepsilon,\alpha)\varepsilon,$$

证明σ是V上的第二类正交变换.（10 分）