

# 青岛大学 2012 年硕士研究生入学考试试题

科目代码: 877 科目名称: 常微分方程 (共 3 页)

请考生写明题号, 将答案全部答在答题纸上, 答在试卷上无效

## 一 选择题 (每题 5 分, 共 35 分)

1. 以下所有形如  $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0$  的方程中, 哪个是非线性

方程? ( )

A.  $\frac{dy}{dx} + y + 4x^2 = 0$

B.  $\frac{d^2y}{dx^2} + x^2 \frac{dy}{dx} + 4xy - \sin x = 0$

C.  $\frac{dy}{dx} + \cos y + x = 0$

D.  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y - e^x = 0$

2. 以下哪个函数**不是**方程  $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$  (这里  $\omega > 0$  是常数)

的解? ( )

A.  $y = \cos \omega x$

B.  $y = \sin \omega x$

C.  $y = c \cos \omega x$  ( $c$  为任意常数)

D.  $y = \sin^2 \omega x$

3. 以下哪个**不是**恰当方程? ( )

A.  $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

B.  $(y - 4x^2)dx - (4y - x)dy = 0$

C.  $(y - x^2)dx - xdy = 0$

D.  $2xydx + (x^2 + 1)dy = 0$

4. 方程  $(y - 1 - x^2y)dx + xdy = 0$  的积分因子 ( )

A. 只与  $x$  有关

B. 只与  $y$  有关

C. 与  $x$  和  $y$  都有关

D. 不存在

5. 设方程  $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0$  在区间  $a \leq t \leq b$

有  $n$  个线性无关的解  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , 则伏朗斯基 (Wronsky) 行列式  $W(t) = W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  满足 ( )

- A. 对任意的  $t \in [a, b]$ ,  $W(t) \neq 0$       B. 对任意的  $t \in [a, b]$ ,  $W(t) \equiv 0$   
 C. 存在某一  $t_0 \in [a, b]$ , 使得  $W(t_0) = 0$       D. 对任意的  $t \in [a, b]$ ,  $W(t) > 0$

6. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 则以下有关矩阵指数的式子哪个是错误的? ( )

- A.  $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$       B.  $\exp(A+B) = \exp A + \exp B$   
 C.  $(\exp T)^{-1} = \exp(-T)$       D.  $\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}(\exp A)T$

7. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = T^{-1}AT$ , 则以下哪个**不是**  $B$  的特征值? ( )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. -1

## 二 填空题 (每题 8 分, 共 40 分)

1. 方程  $\frac{d^3x}{dt^3} - 2\frac{dx}{dt} + x = 0$  的特征方程为 \_\_\_\_\_

2. 设  $\Phi(t)$  是方程  $x' = A(t)x$  (这里  $A(t)$  是在区间  $a \leq t \leq b$  上连续的  $n \times n$  矩阵) 的解矩阵, 则  $\Phi(t)$  是该方程的基解矩阵的充要条件是 \_\_\_\_\_

3. 设  $A$  为  $n \times n$  的常值矩阵, 则矩阵指数  $\exp A =$  \_\_\_\_\_

4. 方程  $x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$  的基解矩阵  $\Phi(t) =$  \_\_\_\_\_

5. 方程  $x' = Ax + f(t)$  (这里  $A$  是  $n \times n$  的常值矩阵) 满足初始条件

$x(t_0) = x_0$  的解是 \_\_\_\_\_

三 解答题 (共 65 分)

1. 求方程  $\frac{dy}{dx} = 2xy$  的通解, 并求满足初始条件  $y(0) = 1$  的特解。  
(15 分)
2. 求方程  $\frac{dy}{dx} = y + \sin x$  满足初始条件  $y(0) = 1$  的解。 (15 分)
3. (1) 方程  $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$  满足初始条件  $y(0) = 0$  的解唯一吗? 如果不唯一, 试给出两个不同的解。(10 分)
- (2) 考虑方程  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , 这里  $f(x, y)$  在矩形域

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

上连续, 试给出该方程满足初始条件  $y(x_0) = y_0$  的解存在且唯一的一个充分条件。(10 分)

4. 求方程  $\frac{d^4 y}{dx^4} - x = 0$  的通解。(15 分)

四 (10 分) 给定非线性微分方程组  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 。假设  $\mathbf{f}(0) = 0$ , 并且向量函数  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x} = 0$  处连续可微。

1. 何为非线性微分方程组  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  的线性近似方程组?
2. 判定下述非线性方程组在平衡点  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  处的稳定性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2 x_2^4 \end{bmatrix}$$