

青岛大学 2012 年硕士研究生入学考试试题

科目代码: 816 科目名称: 高等代数 (共 2 页)
请考生写明题号, 将答案全部答在答题纸上, 答在试卷上无效

一、(10 分) 设 $f(x) = x^3 + (1+t)x^2 + 2x + 2u$ 与 $g(x) = x^3 + tx^2 + u$ 的最大公因式是一个二次多项式, 求 t, u 的值.

二、(10 分) 证明: 计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \text{ 中 } x^4 \text{ 与 } x^3 \text{ 的系数, 并说明理由.}$$

三、(20 分) 设 t_1, t_2, \dots, t_r 是互不相同的数, $r \leq n$. 证明:

$$\alpha_i = (1, t_i, \dots, t_i^{n-1}) (i=1, 2, \dots, r)$$

是线性无关的.

四、(20 分) 设 B 为一 $r \times r$ 矩阵, C 为 $r \times n$ 矩阵, 且 $\text{rank}(C) = r$. 证明:

- 1) 如果 $BC = 0$, 那么 $B = 0$;
- 2) 如果 $BC = C$, 那么 $B = E$.

五、(20 分) 证明: 如果 A 是 $n \times n$ 矩阵 ($n > 2$), 那么

$$\text{rank}(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } \text{rank}(A) = n \\ 1, & \text{当 } \text{rank}(A) = n-1 \\ 0, & \text{当 } \text{rank}(A) < n-1 \end{cases}$$

六、(20 分) 证明: 一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是: 它的秩等于 2 且符号差等于 0, 或者秩等于 1.

七、(20 分) 证明: 上三角的正交矩阵必为对角矩阵, 且对角线上元素为 +1 或 -1.

八、(20分) 1) 证明: 在 $P[x]_n$ 中, 多项式 $f_i = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1}) \dots (x - \alpha_n)$

($i=1, 2, \dots, n$) 是一组基, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是互不相同的数;

2) 在 1) 中, 取 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是全体 n 次单位根, 求由基 $1, x, \dots, x^{n-1}$ 到基 f_1, f_2, \dots, f_n 的过渡矩阵.

九、(10分) 设 A 是线性空间 V 上的可逆线性变换.

1) 证明: A 的特征值一定不为 0;

2) 证明: 如果 λ 是 A 的特征值, 那么 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.