曲阜师范大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：运筹与控制论专业（运筹学方向）
考试科目名称：线性代数

注意事项	1.试题共 3 页。 2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。 3.试题与答题纸一并交上。 4.须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。

一.（共2小题，每小题15分，共30分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

2. 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$，求A的特征值及方阵 $I+A^{-1}$ 的特征值，I为单位矩阵.

二.（共2小题，每小题15分，共30分）

1. 设T是n维线性空间V的线性变换，又V中某个向量 ξ 满足 $T^{n-1}\xi\neq 0$，但 $T^{n}\xi=0$，证明：$\xi, T\xi, T\xi^2, \cdots, T^{n-1}\xi$ 是V中n个线性

无关的向量.

2. 证明：对欧氏空间中任意二向量 α,β 恒有 $(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$，其中等号成立的充要条件是 α 与 β 线性相关.

三. 计算题（共两小题，每小题20分，共40分）

1. λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$$

有唯一解，无解，无穷多解？当方程组有无穷多解时，求其通解.

2. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2kx_1x_2+2mx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $X=TY$ 化为标准型 $y_2^2+2y_3^2$，其中 $X=(x_1,x_2,x_3)'$，$Y=(y_1,y_2,y_3)'$，T为三阶正交矩阵，求常数k和m.

四、证明题（20分）

证明：若 A 为 $n\times n$ 矩阵（$n\geq 2$），那么

$$秩(A^*)=\begin{cases} n, & 当秩(A)=n \\ 1, & 当秩(A)=n-1 \\ 0, & 当秩(A)<n-1, \end{cases}$$

且 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

五. 证明题（共2小题，每小题15分共30分）

1. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则 A 正定的充要条件是存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $A=PP'$.

2. 设 V 为 n 维线性空间，V_1，V_2 为 V 的子空间，且有 维$(V_1+V_2)=$ 维$(V_1\cap V_2)+1$

证明：$V_1+V_2=V_1$，$V_1\cap V_2=V_2$ 或

$V_1+V_2=V_2$，$V_1\cap V_2=V_1$.