曲阜师范大学

2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称：基础数学；应用数学；概率论与数理统计，运筹学方向

考试科目名称：数学分析

注	1. 试题共 2 页.
意	2. **答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题.**
事	3. 试题与答题纸一并交上.
项	4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔做答，字迹清楚.

一．叙述下列定义或定理（每题4分，共20分）

1. 微积分学基本定理；
2. Lagrange 中值定理；
3. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在数集 X 上一致收敛的 Cauchy 准则；
4. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在数集 X 上一致有界；
5. 中间值定理。

二．计算下列各题（每题9分，共63分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$；

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_{x^3}^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$；

3. 设 $z=(2x+y)^{x+2y}$，计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$；

4. 求 $y'(x)$，其中 $y(x)$ 是由方程 $e^{xy}+x^2y-1=0$ 确定的隐函数；

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$;

6. $\iint\limits_{D}\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$, 其中$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{5}}{\sqrt[n]{4^n+9^n+1^n+3^n}}$

三．证明下列各题（1—6 每题 10 分，7 题 7 分，共 67 分）

1. 设$f(x)\in C[a,b]$，且$f(a)=f(b)=0$，$f_+'(a)f_-'(b)>0$，试证：$f(x)$在(a,b)内至少有一个零点；

2. $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n>x_0, x_n\to x_0$，有$f(x_n)=+\infty(n\to\infty)$；

3. 若数列$\{x_n\}$无界，但非无穷大量，则必存在两个子列$\left\{x_{n_k}^{(1)}\right\}$，$\left\{x_{n_k}^{(2)}\right\}$，其中$\left\{x_{n_k}^{(1)}\right\}$是无穷大量，$\left\{x_{n_k}^{(2)}\right\}$是收敛子列；

4. 设$a_n\ge 0$，且数列$\{na_n\}$有界，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^k\ (k>1)$收敛；

5. 设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a\ (-\infty<a<\infty)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$；

6. 设$\{u_n\}$是正的单调增加的有界数列，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$收敛。

7. 设$f(x)$单调，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，如果导数$f'(x)$在$[0,+\infty]$上连续，那么积分$\int_0^{+\infty}f'(x)\sin^4 x\,dx$收敛。