曲阜师范大学2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称：理论物理　凝聚态物理　物理电子学

考试科目名称：高等数学（A）

注	1．试题共 3 页.
意	2．答案必须写在专用答题纸上，写明题号，不用抄题.
事	3．试题与答题纸一并交上.
项	4．须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔做答，字迹清楚.

一．填空题（每题4分，共20分）

1．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}=$________.

2．$\int_{-1}^{1}\dfrac{x\left(x+\ln\left(1+x^2\right)\right)}{1+x^2}dx=$________.

3．曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$在点$(-1,2,2)$的切平面方程为________.

4．微分方程$y''-y'=2x$的通解为________.

5．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2-x_3^2$，则其符号差为______.

二．选择题（每题4分，共20分）（每题有且只有一个正确答案）

6．讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$的间断点，结论为（　）

（A）不存在间断点；　（B）存在间断点$x=1$；

（C）存在间断点$x=0$；（D）存在间断点$x=-1$.

7．设L是连接$A(-1,0)$，$B(0,1)$，$C(1,0)$的折线，则第一型曲线积分

$$I=\int_{(L)}(x+y)ds=(\quad).$$

（A）0；（B）2；（C）$2\sqrt{2}$；（D）$\sqrt{2}$

8．下列命题中正确的是________.

（A）$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$与$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$等价.

（B）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$与$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$都存在，则$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$必连续.

（C）函数在点(x_0,y_0)连续，则极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$必定存在.

（D）$f(x,y)$在点(x_0,y_0)沿任何方向$\vec{l}$的方向导数存在，则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)必连续.

9．设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n 2^n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（　）

（A）条件收敛；（B）绝对收敛；（C）发散；（D）敛散性不能确定.

10．已知α，β，γ_1，γ_2，γ_3都是四维列向量，若$|A|=|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=5$，$|B|=|\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=-2$，则$|A+2B|=$________.

（A）1；（B）27；（C）-27；（D）3.

三．计算下列各题（11－12每题15分，13－16每题10分，共70分）

11．设$f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to1}f(x)$，其中$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在，求$f(x)$.

12．计算二重积分$I=\iint\limits_{(D)}\dfrac{x\sin y}{y}dxdy$，其中$(D)$由$y=x$，$y=x^2$围成.

13．设$f(x)=\max\{x^3,x^2,1\}$，求$\int f(x)dx$.

14．设$\varphi(x)$有连续的二阶导数，且$\varphi(0)=1$，$\varphi'(0)=\dfrac{5}{4}$，求$\varphi(x)$，使方程

$4\varphi(x)ydx+\left[2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\varphi'(x)\right]dy=0$ 为全微分方程.

15. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$ 的上侧.

16. 设 3 阶矩阵 A 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，求 $\left(A^*\right)^{-1}$.

四．证明下列各题（每题 10 分，共 40 分）

17. 证明：相似矩阵具有完全相同的特征根.

18. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛.

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足关系式 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=0$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

20. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明：

（1）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数存在；

（2）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.