曲阜师范大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：数学、基础数学、应用数学、概率统计

考试科目名称： 高等代数

注意事项	
	1.试题共 4 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。

一、 填空(每小题 3 分，共 30 分)

1. 设 A 是 3×4 矩阵，秩 $(A)=2$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 解空间的维数是________.

2. 已知 $P^{2\times2}$ 的两个子空间为

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\c&b\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in P\right\},\ W_2=\left\{\begin{pmatrix}a&c\\0&b\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in P\right\}$$

则 $W_1\cap W_2$ 的维数是________.

3. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 3 维线性空间 V 的一组基，这组基到基 $\varepsilon_1,2\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡矩阵为________.

4. 设 3 维线性空间 V 的一组基为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，$\mathcal{A}$ 是 V 的线性变换，使得

$$\mathcal{A}\varepsilon_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\ \mathcal{A}\varepsilon_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \mathcal{A}\varepsilon_3=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

则 $\mathcal{A}$ 的秩等于________.

5. 设线性变换 $\mathcal{A}$ 可逆，则 $\mathcal{A}$ 的零度等于____________.

6. 设 2 级矩阵 A 与 $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 合同，则 $|A|=$______.

7. 在 2 级矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 中不能对角化的是______.

8. 若 2 级矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}$ 的两个特征值的积为 2，那末这两个特征值的平方和是______.

9. 在 $\mathbf{R}[x]$ 中定义内积为 $(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$，若 $f(x)=x$，则 $|f(x)|=$________.

10. 若实二次型 f 的负惯性指数为 1，符号差为 2，则它的规范形为________.

二、 选择(三选一，每小题 3 分，共 30 分)

1. n 级实对称矩阵按合同关系分为几类？【 】

(A) $\frac{n(n-1)}{2}$ (B) $\frac{n(n+1)}{2}$ (C) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

2. 设 4 维线性空间 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&2&0\\0&2&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}$$

则在 V 的下列子空间中，哪一个是的不变子空间？【 】

(A) $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ (B) $L(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ (C) $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

3. 有 n 个不同的特征值是 n 维线性空间 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 可对角化的【 】

(A) 充分条件； (B) 必要条件； (C) 充分必要条件

4. 设 A 是一个 n 级矩阵，E 是 n 级单位矩阵，且 $|E+A|=0$，则以下结论一定成立的是【 】

(A) 1 是 A 的特征值； (B) -1 是 A 的特征值； (C) -1 是 $-A$ 的特征值

5. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 3 维欧氏空间 V 的一组标准正交基，若 $\alpha\in V$，且 $(\alpha,\varepsilon_i)=1$，$i=1,2,3$ 则 α 的长度为【 】

(A)1 (B)3 (C) $\sqrt{3}$

6. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，则以下结论不正确的是【 】

(A) $\dim V_{\lambda_0}>0$； (B) V_{λ_0} 中每一向量 ξ 都满足等式 $\mathcal{A}\xi=\lambda_0\xi$；
(C) V_{λ_0} 中每一向量 ξ 都是 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

7. 设 A,B 是 n 级实对称矩阵，则以下结论正确的是【 】

(A) 若 A 与 B 合同，则 A 与 B 相似； (B) 若 A 与 B 相似，则 A 与 B 合同
(C) 若秩 $(A)=$ 秩 (B)，则 A 与 B 相似.

8. 设 A 是线性空间 V 的线性变换，ξ_1,ξ_2 是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2\ (\lambda_1\neq\lambda_2)$ 的特征向量，以下结论不正确的是【　】

(A) $\xi_1+\xi_2\neq 0$；　(B) $\xi_1+\xi_2$ 不是 A 的特征向量；

(C) $\xi_1+\xi_2$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_1+\lambda_2$ 的特征向量.

9. 对实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+tx_2^2+2tx_1x_2+x_3^2$ 来说，以下结论正确的是【　】

(A) 当 $t=0$ 时正定；(B) 当 $t=1$ 时正定；(C) 当 $0<t<1$ 时正定.

10. n 级对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 的全体特征值的积为【　】

(A) $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$　　(B) $|A|$　　(C) $(-1)^n|A|$

三、(每小题 10 分，共 20 分)

1. 对任意 $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in P^{2\times2}$，令 $A(X)=\begin{pmatrix}-x_1 & -x_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(1) 证明 A 是线性变换；

(2) 求 A 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

(3) 求 A 的全部特征值.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&4&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$，求正交矩阵 U 使 $U'AU=U^{-1}AU$ 为对角矩阵.

四、(1-4 小题 10 分，5-6 小题 15 分，共 70 分)

1. 设 A 是数域 P 上的 n 级矩阵，且 $A^2=A$，V_1 与 V_2 分别是齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $(A-E)X=0$ 的解空间，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$.

2. 设 σ 是线性空间 V 的线性变换，如果 $\sigma^{k-1}\xi\neq0$，而 $\sigma^k(\xi)=0$，k 是正整数，证明：$\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$ 线性无关.

3. 设 A 是 n 维线性空间 V 的线性变换，证明：A 的秩 $+$ A 的零度 $=n$.

4. 设 A,B 都是 n 维欧氏空间 V 的对称变换，证明：AB 是对称变换当且仅当 $AB=BA$.

5. 设 A 是线性空间 V 的一个线性变换，且 $A^2=E$. 证明：

(1) A 的特征值只能是 ±1；

(2) $V=V_1\oplus V_{-1}$，其中 V_1 是 A 的属于特征值 1 的特征子空间，V_{-1} 是 A 的属于特征值 -1 的特征子空间.

6. 设 A,B 是两个 n 级实对称矩阵，且 B 是正定矩阵，证明：存在一 n 级实可逆矩阵 T 使 $T'AT$ 与 $T'BT$ 同时成对角形.