

## 曲阜师范大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称: 运筹学与控制论专业(控制论方向);

系统分析与集成专业

考试科目名称: 高等代数 B 卷

注	1. 试题共 2 页。
意	2. 答案必须写在答题纸上, 写明题号, 不用抄题。
事	3. 试题与答题纸一并交上。
项	4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答, 字迹清楚。

1 (20分) 设  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中  $T$  可逆,  $D$  可逆, 证明  $(A - BD^{-1}C)^{-1}$  存在, 并求  $T^{-1}$ 。

2 (20分) 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $A^2 = A$  当且仅当  $r(A) + r(A - I) = n$ 。其中  $r(A)$  表示  $A$  的秩,  $I$  为单位阵。

3 (20分) 设  $A = I - \alpha\beta^T$ , 而  $\alpha^T\beta = 1$ , 其中  $\alpha, \beta$  均为  $n$  维列向量, 试求  $A$  的特征多项式和最小多项式。

4 (20分) 设向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  中,  $\alpha_m \neq 0$ , 证明对任意的数  $k_1, \dots, k_{m-1}$ , 向量组  $\beta_1 = \alpha_1 + k_1\alpha_m, \beta_2 = \alpha_2 + k_2\alpha_m, \dots, \beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + k_{m-1}\alpha_m$  线性无关的充要条件是  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性无关。

5 (20分) 证明: 矩阵方程

$$AXA = A$$

对任意的  $m \times n$  矩阵  $A$  都有解。

6 (30分) 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 且  $A + B + AB = 0$ , 则

- (1)  $A$  与  $B$  的特征向量是公共的;
- (2)  $A$  相似于对角阵, 当且仅当  $B$  相似于对角阵;
- (3)  $r(A) = r(B)$ 。

7 (10分)  $e$  为何值时, 方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = e \\ ex_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ex_3 = 1 \end{cases}$  有解, 并求其解。

8 (10分) 设向量空间  $R^2$  的线性变换  $\sigma$  为  $\sigma(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$

(1) 求  $\sigma$  在基  $e_1 = (1, 1), e_2 = (0, 1)$  下的矩阵。

(2) 已知  $\mathcal{E}$  在基  $\varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (0, 1)$  下的坐标为  $(-1, 2)$ , 求  $\sigma(\mathcal{E})$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  下的坐标。