曲阜师范大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：运筹学与控制论专业（运筹学方向）

考试科目名称：数学分析

注意事项	1.试题共 2 页。 2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。 3.试题与答题纸一并交上。 4.须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。

一、（满分 30 分）回答如下问题：（若回答“是”，请给出证明；若回答“不一定”，请给出反例）

(1) 一无穷小量与一非无穷小量的和、差、积是否一定为无穷小量？若不是，会出现哪几种情况？

(2) 数列 $\{x_k\}$ 收敛，数列 $\{y_k\}$ 发散，它们的和与积的极限存在吗？若不是，会出现哪几种情况？

(3) 定义在实数域 R 上的两个一致连续函数的和、积在 R 上是否一致连续？

二、（满分 40 分）

(1) 设正实数向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 计算函数

$$f(m)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

关于 m 的导数.

(2) 写出函数 $\sin(x)$ 在零点的 Taylor 展开式.

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续，且对于任意的 $x\in(0,\infty)$. 有 $f(x^2)=f(x)$, 证明该函数为一常数.

(4) 试证明函数 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

三、（满分 15 分）设 $a>0$, $x_1>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$, $n=1,2,\cdots$, 试证明数列 $\{x_n\}$ 的有界性，单调性，极限的存在性，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

四、（满分 15 分）若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它必有上下确界，而且至少其中之一可以达到.

五、（满分 20 分）

(1) 设 $f(x),g(x)$ 均为实数域 R 上的连续函数，试证明最大值函数 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 也为 R 上的连续函数.

(2) 设 $f(x),g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的凸函数，则最大值函数 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 也为 $[a,b]$ 上的凸函数.

六、（满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$. 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$.

七、（满分 20 分）证明：

(1) 当 $x\geq1$ 时，$\frac{1}{x+1}\leq\ln(1+\frac{1}{x})\leq\frac{1}{x}$

(2) 数列 $\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right\}$ 极限存在.