download.kaoyan.com

曲阜师范大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：基础数学、应用数学、概率与数理统计统计
考试科目名称： 高等代数

注意事项	
	1.试题共 3 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设 A= $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^n=$________.

2. 设 a、b、c 为一元三次方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，则 $\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=$________.

3. 五元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系由 3 个向量组成，则秩 (A)=________.

4. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&s\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，若 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha$ 线性无关，则 s 应满足________.

5. α 是方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的特征向量为________.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{1\le i<j\le 3}x_ix_j$ 的矩阵为________.

7. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&x\\0&0&0\end{pmatrix}$ 可以对角化，则 x=________.

8. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的标准正交基，$\alpha\in V,\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$，则内积 $(\alpha,\varepsilon_n)=$________.

二、选择题（每小题 3 分，共 21 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}x&1\\2&y\end{pmatrix}$，则 A 与 B 可交换的充要条件是（ ）

(A) $x=y+1$ (B) $x=y-1$ (C) $x=y$ (D) $x=2y$

2. 设 A 为 n 阶方阵，如果 A 经过若干次初等变换变成矩阵 B，则（ ）成立。

(A) $|A|=|B|$ (B) 若 $|A|=0$，则必有 $|B|=0$

(C) $|A|\ne|B|$ (D) 若 $|A|>0$，则必有 $|B|>0$

3. 设 A、B 为 n 阶方阵，且 $AB=0$，若秩（A）$=n-1$，则（ ）

(A) 秩(B)=1 (B) 秩(B)<1 (C) 秩(B)≤1 (D) 秩(B)≥1

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，秩(A)=$n-2$，η_1,η_2,η_3 是齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的三个不同的解，则正确的结论是（ ）.

(A) η_1,η_2,η_3 线性相关 (B) $\eta_1-\eta_2,\eta_2-\eta_3$ 是 $Ax=0$ 的基础解系

(C) η_1,η_2,η_3 的任何线性组合是 $Ax=\beta$ 的解

(D) 当 η_1,η_2,η_3 线性无关时，$k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$ 是 $Ax=\beta$ 的通解，其中 k_1,k_2,k_3 是满足 $k_1+k_2+k_3=1$ 的任何数

5. 已知 A 是 4 阶矩阵，且秩 $(3I-A)=2$，则 $\lambda=3$ 是 A 的（ ）

(A) 一重特征值 (B) 二重特征值

(C) 至少是二重特征值 (D) 至多是二重特征值

6. n 元二次型 $f(x)=x^TAx$ 正定的充要条件是（ ）

(A) $|A|>0$ (B) f 的负惯性指数为零

(C) f 的秩为 n (D) A 合同于单位阵

7. 若矩阵 A 相似于矩阵 B，则下列结论不正确的是（ ）

(A) A 和 B 有相同的特征多项式 (B) $|A|=|B|$

(C) A 和 B 有相同的特征值和特征值向量 (D) Tr(A)=Tr(B)

download.kaoyan.com

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1. 计算 n 阶行列式的值 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_i \neq x, i=1,2,\cdots,n$

2. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，求 A^2 的秩

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$，$B=(I+A)^{-1}(I-A)$， 求 $(I+B)^{-1}$

4. 设向量 $\alpha=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)^T, \beta=(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n)^T$，满足 $\alpha^T\beta=0$，且 $a_1b_1 \neq 0$，记 n 阶方阵 $A=\alpha\beta^T$，求（1）A^2；（2）方阵 A 的特征值与的特征向量。

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，求正交阵 Q 使 Q^TAQ 是对角阵。

四、证明题（1-4 每小题 10 分，第 5 题 15 分，共 55 分）

1． 设 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ 为正交阵，且 $|A|=1, \beta^T\alpha_n=1$，证明 $B=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta]$ 可逆，并求 $|B|$。

2. 设 A 为 n 阶方阵，证明秩（A^n）=秩（A^{n+1}）.

3. 设 A 与 B 均为 n 阶方阵，证明 AB 与 BA 有相同的特征值。

4. 已知 A 为 n 阶实反对称方阵，证明 $I-A^2$ 可逆且为正定矩阵。

5. 设 σ 为 n 维线性空间 V 的线性变换，且设 $V_1=\{x \in V \mid \exists m 使 \sigma^m(x)=0\}$，$V_2=\bigcap_{j=1}^{\infty}\sigma^j(V)$，证明：

（1）V_1,V_2 均为 σ 的不变子空间；

（2） σ 在 V_1 上导出的变换为幂零，σ 在 V_1 上导出的变换可逆；

（3）$V=V_1 \oplus V_2$。