曲阜师范大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：控制论、系统分析与集成

考试科目名称：高等代数 C

注意事项	
	1.试题共 2 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。

1. 求下面行列式 A 的值。 (25 分)

$$A=\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & x+a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & 1+a_3 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x & x+a_n \end{vmatrix}$$

2．叙述向量组极大线性无关组的定义；并求如下向量组的一个极大线性无关组。 (15 分)

$$\beta_1=(1\ \ -1\ \ 2\ \ 4),\ \beta_2=(0\ \ 3\ \ 1\ \ 2)$$

$$\beta_3=(3\ \ 0\ \ 7\ \ 14),\ \beta_4=(1\ \ -1\ \ 2\ \ 0)$$

$$\beta_5=(2\ \ 1\ \ 5\ \ 6)$$

3．设 A 为 n 阶可逆矩阵， B 和 C 分别为 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵，如果 $I_m+CA^{-1}B$ 可逆，则 $A+BC$ 可逆且

$$[A+BC]^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B\left[I_m+CA^{-1}B\right]^{-1}CA^{-1}$$

其中 I_m 为 m 阶单位矩阵。 (15 分)

4. 证明： (25 分)

(i) 如果 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型那么

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_1 & \cdots & y_1 & 0 \end{vmatrix}$$ 是负定二次型；

(ii) 如果 A 是正定矩阵，那么

$$|A|\le a_{nn}P_{n-1}$$

其中 P_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 级顺序主子式。

(iii) 如果 A 是正定矩阵，那么

$$|A|\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

5. 设变换 σ,τ 满足 $\sigma^2=\sigma,\tau^2=\tau$，证明： (25 分)

(i) σ 与 τ 有相同值域的充分必要条件是 $\sigma\tau=\tau,\ \tau\sigma=\sigma$；

(ii) σ 与 τ 有相同核的充分必要条件是 $\sigma\tau=\sigma,\ \tau\sigma=\tau$.

6. 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求一正交矩阵 U 使得 U^TAU 成对角形. (30 分)

7. 设 P,D 为 $n\times n$ 矩阵，x,ω 为 n 维向量，证明：对于任意常数 $\varepsilon>0$，有 (15 分)

$$x^TPDw+w^TD^TP^Tx\le\varepsilon w^Tw+\frac{1}{\varepsilon}x^TPDD^TP^Tx$$