曲阜师范大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称：基础数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论

考试科目名称：数学分析 A

注意事项	1.试题共 2 页。 2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。 3.试题与答题纸一并交上。 4.须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。

一、叙述下列定义或定理(每题 5 分，共 15 分)

1. 设 S 是一个 **R** 中的数集，叙述 S 的上确界的定义。
2. 叙述拉格朗日 (Lagrange) 中值定理。
3. 叙述函数列一致收敛的柯西准则。

二、判断对错（每题 5 分，共 10 分）

1. 设函数 $f(x)$在点x_0可导且 $f'(x_0)>0$; 则f必在点x_0 的某个邻域内严格增。 （ ）
2. 设函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续且可导，则导函数必连续。 （ ）

三、计算下列各题（每题 8 分，共 56 分）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})$
3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$。
4. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_{x^2}^{x^4}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}$
5. 设$y=x^x, x>0$。求y'
6. 求隐函数的导数：设$z=f(x+y+z,xyz)$, 计算$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$
7. 设D是由直线 $x=0, y=1$及$y=x$围成的区域，计算$I=\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy$

四、证明计算题（1-6 每题 9 分，第 7 题 7 分，第 8 题 8 分，共 69 分）

1. 设S为有界数集，a=supS, 且 $a \notin S$。证明：自S中可以选取互不相同的点列收敛到a。
2. 设数列 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a(a>0)$。证明：存在N>0,当 $n>N$ 时，$\frac{a}{2}<a_n<\frac{3}{2}a$。
3. 设函数 f 在[a, +∞)上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在。证明：f 在[a,+∞)上有界且一致连续。
4. 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$。
5. 证明级数 $\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 是收敛的。
6. 用有限覆盖定理证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间[a,b]上连续，则 $f(x)$ 在[a,b]上有界。
7. 计算：$I=\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx \quad (p>0,b>a)$
8. 设 f 是定义在(-∞, +∞)上的一个连续周期函数，周期为 p，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)dt$.