

曲阜师范大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：理论物理，原子与分子物理，凝聚态物理，物理电子学，
通信与信息系统，光学

考试科目名称：量子力学

注 意 事 项	1. 试题共 <u>2</u> 页。 2. 答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。 3. 试题与答题纸一并交上。 4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。
------------------	--

一. (10 分) 一个正电子通过物质时，被原子捕获并与原子中的电子一道湮灭而产生两个光子： $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ 。求所产生光子的 de Broglie 波长。

二. (10 分) 如果 $\psi_1(x, t)$ 和 $\psi_2(x, t)$ 是同一个 Schrödinger 方程的解，试证明

$$\psi(x, t) = c_1\psi_1(x, t) + c_2\psi_2(x, t)$$

也是该 Schrödinger 方程的解。

三. (10 分) 设一个一维自由粒子的初态为 $\psi(x, 0) = e^{ip_0x/\hbar}$ ，求 $\psi(x, t)$ 。

四. (10 分) 设一个质量为 m 的粒子束缚在势场 $V(x)$ 中作一维运动，其能量本征值和本征函数分别为 E_n 和 ψ_n ($n=1, 2, 3, \dots$)。试计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)dx \quad (m \neq n)$$

五. (10 分) 如果势函数 $V(r)$ 可以写成一元函数之和 $V(r) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$ ，试证明定态 Schrödinger 方程可以分解为三个一维方程（写出具体方程），并给出体系的总能量。

六. (20 分) 设粒子在一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (0 < x < a) \\ \infty, & (x \leq 0, x \geq a) \end{cases}$$

中运动。试计算：

(1) \bar{x} , \bar{p} ;

(2) $(\Delta x)^2$ 。

七. (20分) 设粒子在势阱

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & (x \leq 0) \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & (x > 0) \end{cases}$$

中运动, 给出粒子的能级和波函数。

八. (20分) 设算符 \hat{a} 具有性质 $\hat{a}^2 = 0$, $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$ 。

(1) 求算符 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ 的本征值;

(2) 计算对易式 $[\hat{N}, \hat{a}]$ 和 $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$ 。

九. (20分) 设在 $t=0$ 时刻, 氢原子处于状态

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} [2|100\rangle + |210\rangle + \sqrt{2}|211\rangle + \sqrt{3}|21, -1\rangle]$$

计算:

(1) 在 $|\psi_0\rangle$ 态下能量的平均值;

(2) 在 $t > 0$ 时, 体系处于 $|lm\rangle = |11\rangle$ 态的几率。

十. (20分) 在时间 $t \leq 0$ 时, 一电子置于沿 z 方向的均匀磁场 B_0 中。此时体系的

Hamilton 量

$$H_0 = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -\frac{eh}{2m_e c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = -\frac{eB_0 \hbar}{2m_e c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \hbar\omega_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

其中, $\omega_0 = \frac{|e|B_0}{2m_e c}$ 。当 $t > 0$ 时再加上沿 x 方向的旋转磁场 $B_x = B_0 \cos 2\omega t$ 和沿

y 方向的旋转磁场 $B_y = B_0 \sin 2\omega t$ 。设初始时刻电子的自旋沿 z 轴正方向极化。把 B_x 、 B_y 与电子自旋磁矩的相互作用视为微扰, 求电子跃迁到自旋沿 z 轴负方向极化的几率。