曲阜师范大学　2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：系统分析与集成专业

考试科目名称：高等代数

注意事项	1. 试题共 2 页； 2. 答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。 3. 试题与答题纸一并交上； 4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。

1.（10 分）计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

2.（20 分）求出齐次线性方程组 $AX=0$ 的一般解，其中系数矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

3.（20 分）证明 R^3 中的两组向量

$$\begin{cases}\alpha_1=(1,0,-1), \\ \alpha_2=(2,1,1), \\ \alpha_3=(1,1,1),\end{cases} \quad \begin{cases}\beta_1=(0,1,1), \\ \beta_2=(-1,1,0), \\ \beta_3=(1,2,1)\end{cases}$$

都是 R^3 的基，并求出由基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 到基 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 的过渡矩阵。

4.（20 分）证明：如果 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间，那么

$$维(V_1)+维(V_2)=维(V_1+V_2)+维(V_1\cap V_2),$$

即两子空间和的维数与两子空间交的维数之和等于两子空间维数的和。

5.（10 分）证明：设 $V(F)$ 的线性变换 σ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\}$ 下的矩阵为 A，向量 α 在该基下的坐标表示为 $X=[x_1,x_2,\cdots x_n]^T$，$\sigma(\alpha)$ 在该基下的坐标表示为 $Y=[y_1,y_2\cdots y_n]^T$，则

$$Y=AX.$$

6.（30 分）证明：若 λ 是矩阵 A 的特征值，X 是 A 的属于 λ 的特征向量，则

（1）$k\lambda$ 是 kA 的特征值（k 是任意常数），

（2）λ^m 是 A^m 的特征值（m 是正整数），

（3）当 A 可逆时，λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值；

且 X 仍是矩阵 kA，A^m，A^{-1} 的分别对应的特征向量。

（4）设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$ 成立，则 A 的所有特征值 $\lambda_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 的模 $|\lambda_k|$ 小于1(当为 λ_k 实数时，是指 λ_k 的绝对值)。

7.（20 分）设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$，计算出正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角形矩阵，并给出该对角形矩阵。

8.（10 分）设 A 是 $m\times n$ 的矩阵，A^* 是 A 的共轭转置矩阵，试证明当且仅当 $\rho(A^*A)=n$ 时，有 $\rho(A)=n$，即矩阵 A 的秩等于它的列数。

9.（10 分）设 A,B 为正定矩阵，求证 AB 的特征值均为正实数。