曲阜师范大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：基础数学、应用数学、概率论与数理统计、运筹学与控制论

考试科目名称：高 等 代 数

注意事项	1.试题共 2 页。 2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。 3.试题与答题纸一并交上。 4.须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。

一、填空(每小题 3 分，共 15 分，注：答案必须写在答题纸上)

1. 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，秩$(A)=r$，则线性方程组 $AX=0$ 解空间的维数是________.

2. 若基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 的过渡矩阵为 A，基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 到基 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 的过渡矩阵为 B，则基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为________.

3. 设 A 为 n 阶方阵，若秩$(A)=n-1$，则秩$(A^*)=$________.

4. 设 -1 和 5 是二级矩阵 A 的两个特征值，那么 A 的特征多项式是________.

5. 若实二次型 f 的秩为 4，符号差为-2，则它的规范形是________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分，注：答案必须写在答题纸上）

1. A、B 为 n 阶矩阵，则秩$(A+B)$ ________。
   (A). > 秩(A) + 秩(B)　　(B). ≤ 秩(A) + 秩(B)
   (C). > max(秩(A)，秩(B))　　(D). < min(秩(A)，秩(B))

2. 对任意一个 n 阶矩阵 A，若 n 阶矩阵 B 能满足 $AB=BA$，那么 B 是______。
   (A).对称阵　(B).对角阵　(C).单位阵　(D). A 的逆矩阵

3. 设 A 是 n 阶矩阵，k 为常数，那么 $(kA)^*=$________。
   (A) kA^*；　(B) k^nA^*；　(C) $k^{n-1}A^*$；　(D) kA^{-1}.

4、n 阶方阵 A 与 B 为相似的充分条件是________。
   (A) $|A|=|B|$；　(B) 秩(A)= 秩(B)；　(C) $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$；
   (D) A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两不等。

5、P 是正交矩阵，A 是对称矩阵，矩阵 $P^{-1}AP$ 是________。
   (A)正交矩阵；(B)对称矩阵　(C)不一定是对称矩阵　(D)以上均不对

三、计算题(1-2 小题每题 10 分，第 3 题 15 分，共 35 分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 A^n

2. 计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1+\lambda & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda \end{vmatrix}$

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的一个特征值为 3,

（1）求 a 的值;

（2）求正交矩阵 P 使 $P'AP$ 为对角阵。

四、证明题(1-4 小题每题 10 分,第 5-7 题每题 15 分，共 85 分):

1. 方阵 A 称为幂零矩阵，如果有正整数 k 使得 $A^k=0$.

(1) 如果 A 与 B 是幂零矩阵，A+B 是否幂零?

(2) 证明：如果 A 与 B 是幂零矩阵且 AB=BA，那么 A+B 是幂零矩阵.

(3) 证明：如果 A 是幂零的，那么 E+A 与 E-A 均为可逆矩阵(其中 E 是单位矩阵).

2. 设A是n级方阵， 证明，线性方程组 $AX=0$ 与 $A^2X=0$ 同解的充分必要条件是:秩(A)= 秩(A^2)，其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$.

3. 设B,C分别是m阶与n阶方阵，B可逆，令$G=\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$. 证明：G 可逆的充要条件是$C-AB^{-1}D$可逆

4. 设A是n级实对称矩阵，且$A^2=A$，秩$(A)=r$. 证明存在正交矩阵T，使得 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. 设σ,τ都是n维线性空间 V 的线性变换，如果σ的n个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$两两互异，证明：$\sigma\tau=\tau\sigma$的充要条件是$\sigma$的特征向量也是$\tau$的特征向量。

6. 设 A, B 是$n\times n$实对称矩阵，定义(A, B)=tr(AB)，证明:所有$n\times n$实对称矩阵关于上述积作成一欧氏空间 V。 并求下列（空间的）维数:

（1） dim(V)；　　(2)Dim(S)，其中$S=\{A\in V\mid tr(A)=0\}$.

(3) $\dim(S^{\perp})$.

7. 设A,B是两个$n\times n$实对称矩阵，且 B 是正定矩阵. 证明存在一$n\times n$实可逆矩阵 T 使$T'AT$与$T'BT$同时为对角形.