

曲阜师范大学 2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称: 理论物理 凝聚态物理 物理电子学 原子与分子物理

考试科目名称: 《高等数学 A》

注	1. 试题共 3 页.
意	2. 答案必须写在专用答题纸上, 写明题号, 不用抄题.
事	3. 试题与答题纸一并交上.
项	4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答, 字迹清楚.

一. 判断题(正确的划√,错误的划×, 每小题 2 分, 共 12 分)

1. 若数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$ 都收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 一定收敛.
2. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上必可导.
3. 若 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则 $f^2(x)$ 在 x_0 点也可导.
4. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必存在.
5. 两个无穷大量的和仍是一个无穷大量.
6. 正定矩阵的特征值全大于零.

二. 填空题 (每题 4 分, 共 24 分)

1. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 对应的二次型是_____.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x} =$ _____.

3. 方程 $(3x^2 + 2xe^{-y})dx + (3y^2 - x^2e^{-y})dy = 0$ 的通解为_____.

4. 设 $f(x)$ 可导, 则 $f(\sin e^x)$ 的导数为_____.

5. 点 $(2, 1, 0)$ 到直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{3}$ 的距离 $d =$ _____.

6. R^3 中的向量 $\alpha = (1, 2, 1)$ 在基底 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 下的坐标为_____. 其中 $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, -1)$, $\alpha_3 = (1, -1, -1)$.

三. 选择题 (每题 4 分, 共 24 分) (每题有且只有一个正确答案)

1. 数列 $\{x_n\}$ 收敛于实数 a 等价于

(A) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内有数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项;

(B) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内有数列 $\{x_n\}$ 的有穷多项;

(C) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 外有数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项;

(D) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 外有数列 $\{x_n\}$ 的有穷多项.

2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$; (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n-1})$.

3. 已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 为某一函数 $f(x, y)$ 的全微分, 则 a 和 b 的值分别是

(A) -2 和 2; (B) 2 和 -2; (C) -3 和 3; (D) 3 和 -3.

4. 设 $f(x)$ 可导, 且满足条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则 $f'(1)$ 等于 ()

(A) 2; (B) -2; (C) $\frac{1}{2}$; (D) -1.

5. 零为矩阵 A 的特征值是矩阵 A 不可逆的 ()

(A) 充分条件; (B) 必要条件; (C) 充要条件; (D) 既非充分又非必要条件.

6. 设矩阵 A 为 n 阶方阵, 则 $|A| = 0$ 的必要条件是 ()

(A) 两行 (列) 元素对应成比例;

(B) 必有一行为其余行的线性组合;

(C) A 中有一行的元素全为零;

(D) 任一行为其余行的线性组合.

四. 计算题 (每题 10 分, 共 70 分)

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

2. 求不定积分 $\int x \arctan x dx$.

3. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ 在 $x=1$ 点展成幂级数.

4. 求方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解.

5. 计算 $I = \int_L (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$, L 为由点 $(a, 0)$ 到点 $(0, 0)$ 的上

半圆周 $x^2 + y^2 = ax$, $y \geq 0$.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

7. 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解, 求常数 a .

五. 证明题 (1-2 每题 7 分, 第 3 小题 6 分, 共 20 分)

1. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$, 证明: 矩阵 A 的特征值只能是 1 或 2.

2. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 且以 T 为周期的连续函数, a 为任意常数,

则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

3. 设 a_0, a_1, \dots, a_n 为满足 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ 的实数, 证明: 方程

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.