

曲阜师范大学 2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称： 运筹学与控制论(运筹学方向)

考试科目名称： 高等代数 B

注 意 事 项	1. 试题共 <u>2</u> 页。 2. 答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。 3. 试题与答题纸一并交上。 4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答，字迹清楚。
------------------	--

一、计算题（每题 15 分，共 30 分）

(1) 计算 $n(n \geq 2)$ 阶行列式：

$$\begin{vmatrix}
 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\
 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\
 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\
 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n
 \end{vmatrix}$$

(2) a 取何值时以下方程组有解？并求其解。

$$\begin{cases}
 ax + y + z = a - 3 \\
 x + ay + z = -2 \\
 x + y + az = -2
 \end{cases}$$

二、(15 分)

设 A 与 B 为 n 阶方阵，

证明：若 $AB = 0$ ，则 $\text{秩}(A) + \text{秩}(B) \leq n$ 。

三、(20 分)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及 β 为 $m+1$ 个向量，且

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m, \quad m > 1.$$

证明：向量组 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

四、(25分)

设 A 是一个 n 阶方阵. 证明:

(1) A 是反对称的 (即: $A^T = -A$) 当且仅当对任意的 n 维向量 x , 都有 $x^T Ax = 0$;

(2) 若 A 是对称矩阵, 且对于任意的 n 维向量 x , 都有 $x^T Ax = 0$, 则 $A = 0$;

(3) 若 A 和 B 都是对称矩阵, 且对于任意的 n 维向量 x , 都有 $x^T Ax = x^T Bx$, 则 $A = B$.

五、(20分)

设 A, B 为任意两个 n 阶方阵, 证明: AB 与 BA 有相同的特征多项式.

六、(20分)

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 其特征根为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

证明: 对任意 n 维向量 x , 均有: $\lambda_1 x^T x \leq x^T Ax \leq \lambda_n x^T x$.

七、(20分)

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间.

证明: $V_1 + V_2 = V_1 \cup V_2$ 的充分必要条件是: $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$.