曲阜师范大学

2009年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称：基础数学；　概率论与数理统计；

应用数学；　运筹学与控制论(控制论)

考试科目名称：数学分析A

注意事项	
	1. 试题共 3 页.
	2. **答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题.**
	3. 试题与答题纸一并交上.
	4. 须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚.

一. 叙述下列定义（每题4分，共12分）

1. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$，其中$A$为实数.

2. 二元函数$f(x,y)$在区域D上一致连续.

3. 函数列$\{f_n(x)\}$在X上非一致收敛于$f(x)$.

二. 判断题（正确的填√，错误的填×）（每题2分，共14分）

1. 若$\{a_n\}$的任何子列都收敛，则$\{a_n\}$必收敛.　(　)

2. 若$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.　(　)

3. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.　(　)

4. 若$f(x)\in C[a,b]$，则$\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可导.　(　)

5. 若$f(x)$在区间I上一致连续，则$f(x)$在I上有界.　(　)

6. 若$f(x,y)$在点P_0可微，则$f(x,y)$在点P_0沿任何方向的方向导数都存在.　(　)

7. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都发散，且$a_n\le c_n\le b_n$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$也一定发散.　(　)

三．计算题（每题 7 分，共 56 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

3. 设 $f(x)$ 为可导函数，求 $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$ 的导数.

4. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$，$b>a>0$.

5. 设 $f(u,v)$ 的二阶偏导数连续，$w=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$，求 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，且已知 $g(0)=g'(0)=0$，$g''(0)=4$，求 $f'(0)$.

7. $\oint_C \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 C: $(x-1)^2+y^2=9$.

8. 求 $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中 V 是球体 $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

四．按要求解答下列各题（1-4 每题 12 分，5-6 每题 10 分，共 68 分）

1. 若 $\{a_n\}$ 为递增数列，$\{b_n\}$ 为递减数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 都存在且相等.

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$，$\int_a^b f(x)dx=0$，证明：$f(x)=0$，$x\in[a,b]$.

3. 设 $a_n>0$，$a_n>a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 收敛.

4. 用闭区间套定理证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则

曲阜师范大学研究生处

至少存在一点x_0，使得$f(x_0)=0$.

5. 设函数$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$（$m$为正整数）

（1）m等于何值时，$f(x)$在$x=0$连续.

（2）m等于何值时，$f(x)$在$x=0$可导.

6. 设$f(x)$在任何有限区间上可积，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，（$A$是有限数），证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=A.$$

曲阜师范大学 2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称： 运筹学与控制论专业(运筹学方向)

考试科目名称： 数学分析 B

注意事项	
	1.试题共 1 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚。

一、（15 分）利用泰勒公式求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$.

二、（20 分）计算由摆线的参数方程 $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数.

三、（20 分）证明：对任何两个实数 a, b, 均有 $|\arctan a - \arctan b| \le |a-b|$.

四、（15 分）计算不定积分 $\int x^2 \sin x dx$.

五、（20 分）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x) = \int_a^x f(t)(x-t)dt$, 证明：$F''(x) = f(x)$.

六、（20 分）证明级数 $\sum (-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}$ 是收敛的.

七、（20 分）计算 $\iint\limits_S xzdydz + yzdzdx + dxdy$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 的上半部分与平面 $z=3$ 所围成的闭曲面，法向量指向外侧.

八、（20 分）设 $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$, 求证 $\{S_n\}$ 收敛.