曲阜师范大学 2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称：理论物理　凝聚态物理　物理电子学　原子与分子物理

考试科目名称：《高等数学 A》

注意事项	
	1．试题共 3 页．
	2．**答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题．**
	3．试题与答题纸一并交上．
	4．须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚．

一．判断题(正确的划√,错误的划×，每小题 2 分，共 14 分)

1．若数列$\{x_{3n-2}\}$、$\{x_{3n-1}\}$和$\{x_{3n}\}$都收敛，则数列$\{x_n\}$一定收敛．

2．若$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上必可导．

3．若$|f(x)|$在x_0点可导，则$f^2(x)$在x_0点必可导．

4．若$f(x)$在点x_0连续，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$必存在．

5．两个无穷大量的乘积仍是一个无穷大量．

6．两个同阶正交矩阵的乘积仍是正交矩阵．

7．若单调数列$\{x_n\}$有一个子列$\{x_{n_k}\}$收敛于A，则数列$\{x_n\}$一定收敛于A．

二．填空题（每题 3 分，共 24 分）

1．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ [illegible] $-6x_1x_2-4x_2x_3$的矩阵是__________．

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=$__________．

3．方程$y'+\dfrac{y}{x}=x$的通解为______________．

4．设$f(x)$可导，则$f($[illegible]an $x)$的导数为______________．

5．点$(-1,1,1)$到平面 [illegible]$y+z+8=0$的距离$d=$______________．

6. 设 A 为三阶方阵，$|B|=-2$，$|A|=\frac{1}{8}$，则 $\|B|A|=$______.

7. 曲面 $e^{z}-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程是______________.

8. 微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的通解为____________________.

三. 选择题（每题 3 分，共 12 分）（每题有且只有一个正确答案）

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必收敛的级数为（　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$；（B）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$；（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$；（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n-1})$.

2. 设 $f(x)$ 可导，且满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1-x)}{x}=-1$，则 $f'(1)$ 等于（　　）

（A）2；　（B）$-\frac{1}{2}$；　（C）$\frac{1}{2}$；　（D）-1.

3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　（B）$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

（C）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　（D）$\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

4. 五阶实对称矩阵 A 的特征值是 $0,1,2,3,4$，则矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于（　　）

（A）1；（B）2；（C）4；（D）5.

四. 按要求解答下列各题（每题 10 分，共 100 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

2. 计算 $I=\oiint\limits_{S}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，$S$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 的外侧.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x^3, & x>0 \end{cases}$，求 $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

4. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

5. 计算不定积分 $\int x\arcsin x dx$.

6. 计算 $I=\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$，$D$ 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域.

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的 s 个解，又常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 满足条件 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，证明：$X=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_sX_s$ 也是它的解.

8. 判定二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$ 的正定性.

9. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明：$\int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du=\int_0^x(x-u)f(u)du$.

10. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值.