曲阜师范大学 2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：系统分析与集成

考试科目名称：常微分方程

注意事项	
	1.试题共 2 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚。

一、填空题 （每空 3 分，共 30 分）

1、形如__________的方程，称为齐次方程。

2 当__________时，方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 称为恰当方程，或称全微分方程，其原函数为：__________。

3 n 阶线性齐次微分方程的所有解构成一个____维线性空间。

4 方程 $xdy+ydx=0$ 的通解为：__________。

5 设 $\Phi(t)$ 是方程组 $\dfrac{dX}{dt}=A(t)X$ 的基本解矩阵，$\varphi(t)$ 为 $\dfrac{dX}{dt}=A(t)X+F(t)$ 的某一解，则它的任一解都可表为________。

6 二阶线性齐次微分方程的两个解 $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ 成为其基本解组的充要条件是______.

7 函数组 e^t, e^{-t}, e^{2t} 的朗斯基行列式为________。

8 方程__________称为克莱洛方程，它的通解为：__________。

二 解方程：（每题 10 分，共 50 分）

1 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=\mathrm{e}^x$

2 $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$

3 $(2xy+3x^2y^2)dx+(x^2+2x^3y)dy=0$

4 $x^{(7)}-2x^{(5)}+x^{(3)}=0$

5 $xy'-y=x\tan\dfrac{y}{x}$

三 解方程组：$x'=2x-3y,\quad y'=x-2y$ （20 分）

四　证明题（第 1 题 10 分，2，3 题各 15 分，共 40 分）

1. 试证：如果 $\varphi(t)$ 是 $\frac{dX}{dt}=AX$ 满足初始条件 $\varphi(t_0)=\eta$ 的解，那么

$$\varphi(t)=\exp A(t-t_0)\eta .$$

2 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，求证：方程 $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}+y=f(x)$ 的任意解 $y=y(x)$ 均有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$

3 设 $n\times n$ 矩阵函数 $A_1(t)$，$A_2(t)$ 在（a, b）上连续，试证明，若方程组 $\frac{dX}{dt}=A_1(t)X$ 与 $\frac{dX}{dt}=A_2(x)X$ 在（a, b）上有相同的基本解组，则 $A_1(t)\equiv A_2(t)$，$x\in(a,b)$.

五　考察方程组 $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_2-x_1^3\\ \dot{x}_2=x_1-x_2^3\end{cases}$ 零解的稳定性。（10 分）