# 曲阜师范大学

# 2010年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称：基础数学　　概率论与数理统计

应用数学　　运筹学与控制论

考试科目名称：《数学分析》

| | |
|---|---|
| 注意事项 | 1. 试题共 2 页.<br>2. 答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题.<br>3. 试题与答题纸一并交上.<br>4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔做答，字迹清楚. |

一. 叙述下列定义（每题4分，共12分）

1. 数集 $E$ 的上确界 $\beta=\sup E$.

2. 用“$\varepsilon-\delta$”语言叙述函数 $f(x)$ 在 $X$ 上非一致连续.

3. 叙述无穷积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 $y$ 在数集 $Y$ 上非一致收敛的定义.

二. 计算下列各题（1—6每题8分，第7题10分，共58分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

4. 求函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ 的极值.

5. 设 $f(u,v)$ 的二阶偏导数连续，$w=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$.

6. 计算 $I=\iint\limits_{(D)}\max\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0\}$.

7. 计算第二型曲面积分 $I=\iint\limits_{(S)_外}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$，其中 $S$ 为椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 的外侧.

三. 讨论敛散性（1—2 每题 5 分，第 3 题 10 分，共 20 分）

1. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 的敛散性.

2. 讨论函数列 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$，$n=1,2,\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性.

3. 讨论无穷积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x^p}dx$，$p\geq\frac{1}{2}$ 的绝对收敛与条件收敛性.

四. 证明题（每题 10 分，共 60 分）

1. 用定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-6x+10\right)=2$.

2. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数，证明：对 $\forall t\in R$ 有 $\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$.

3. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $X$ 上都一致连续，则 $f(x)+g(x)$ 在 $X$ 也上一致连续.

4. 设 $x_1=\sqrt{3}$，$x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$，$(n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5. 若 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 在 $P_0$ 点的某一邻域内存在，且至少有一个在点 $P_0$ 连续，则 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 可微.

6. 设（1）在每一个有限区间 $(a,b)$ 内，$f(x,y)$ 一致收敛于 $f(x,y_0)$；（2）$|f(x,y)|\leq F(x)$；（3）积分 $\int_a^{+\infty}F(x)dx$ 收敛，证明：

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f(x,y_0)dx.$$