曲阜师范大学　2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：运筹学与控制论专业(运筹学方向)

考试科目名称：高等代数 B

注意事项	
	1.试题共 2 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚。

一、计算题（1、2 小题各 15 分，3 小题 10 分，共计 40 分）

(1) 计算以下 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} x & a & a\cdots\cdots a \\ a & x & a\cdots\cdots a \\ a & a & x\cdots\cdots a \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a & a & a\cdots\cdots x \end{vmatrix}$$

(2) a 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{cases}$$

有解？并求其解.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求 A 的逆矩阵 A^{-1}.

二、(20 分)

设 A 与 B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：

$$秩(A\pm B)\le 秩(A)+秩(B)$$

三、(25 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ $(\alpha_i\ne 0, i=1,2,\cdots,m)$ 线性相关，向量 x 可以表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 的非负线性组合，证明：x 可以表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 的一个极大线性无关组的非负线性组合.

四、(25 分)

用正交线性替换化下列二次型为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

五、(20 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 是两组 n 维向量. 证明：若这两个向量组都线性无关，则空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)\cap L(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t)$ 的维数等于齐次线性方程组

$$\alpha_1x_1+\cdots\alpha_sx_s+\beta_1y_1+\cdots\beta_ty_t=0$$

的解空间的维数.

(注：题中 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$ 表示由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 生成的子空间，$L(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t)$ 表示由 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 生成的子空间)

六、(20 分)

设 A 为 n 阶实对称矩阵，

证明：存在一正实数 c，使对任意一个实 n 维向量 x，都有：

$$|x^TAx|\le cx^Tx.$$