曲阜师范大学 2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称： 基础数学、应用数学、概率论与数理统计、运筹学与控制论(控制论方向)

考试科目名称： 高等代数 A

注意事项	
	1.试题共 2 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚。

一、判断题（每题 2 分，共 10 分）

1. 线性变换把线性无关向量组变成线性无关向量组。(　　)
2. 实二次型 $f(X)=X'AX$ 半正定 $\Leftrightarrow$ A 的所有顺序主子式都大于等于 0。(　　)
3. 任意一个包含零向量的向量组必定线性相关。(　　)
4. 对称变换在任意基下的矩阵都是对称矩阵。(　　)
5. $f(x)\in F[x]$，若 $f(x)$ 在数域 F 上可分解，那么它在数域 F 上有根。(　　)

二、填空题（每题 3 分，共 12 分）

1. 把 $f(x)=x^4-5$ 表示成 $x-1$ 的多项式是________。

2. 设行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix}$ 中，余子式 $M_{22}=3$，则 $a=$________。

3. $\lambda-$矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$ 的不变因子为________。

4. 设矩阵 A 的特征多项式是 $f(\lambda)=\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+2$，则 $A^{-1}=$________。

三、计算题（共 42 分）

1.（10 分）设 A 是实数域上的 5 阶非零方阵，$A=(a_{ij})$，A_{ij} 是 a_{ij} 代数余子式。若 $a_{ij}=A_{ij}$，$1\le i,j\le 5$，求 $|A|$。

2. （12 分）求 t 值，使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根。

3.（20 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$，

（1）求 A 的特征值和特征向量；

（2）求正交矩阵 T，使得 $T'AT$ 成对角形.

四、证明题（共 86 分）

1.（12 分） 证明 A 是 n 阶正定矩阵的充要条件是存在 n 个线性无关的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使 $A=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T\cdots+\alpha_n\alpha_n^T$。

2.（12 分）设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换，证明：如果 σ 满足下列三个条件中的任意两个，那么它必定满足第三个：(I) σ 是正交变换；(II) σ 是对称变换；(III) σ^2 是单位变换。

3. （18 分） 设 η_0 是线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases}$ 的一个解，

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是它的导出方程组的一个基础解系，S 是它的解集，令

$$\gamma_1=\eta_0,\gamma_2=\eta_1+\eta_0,\cdots,\gamma_{t+1}=\eta_t+\eta_0$$

证明： $S=\{\gamma=u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+u_{t+1}\gamma_{t+1}\mid u_1+u_2+u_{t+1}=1\}$

4. （18 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 及 β 为 $m+1$ 个向量，且 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$，$(m>1)$。证明：向量组 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

5.（26 分）设 V 是数域 F 上 m 维线性空间 $(m\geq 1)$。

（1） 若 $V_0,V_1,\cdots,V_{n-1}$ 为 V 的 n 个真子空间，试证：$\bigcup_{i=0}^{n-1}V_i$ 为 V 的一个真子集。

（2） 若 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 为 V 上的两两不相同的线性变换，试证：存在向量 $\alpha\in V$，使得 $T_1\alpha,T_2\alpha,\cdots,T_k\alpha$ 也两两不同。