曲阜师范大学　2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：运筹学与控制论专业（运筹学方向）

考试科目名称：高等代数 B

注意事项	1.试题共　2　页。 2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。 3.试题与答题纸一并交上。 4.须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚。

一、按要求求解下列各题。

1.（10 分）求向量组 $\vec{\alpha}_1=(1,2,1,3),\vec{\alpha}_2=(4,-1,-5,-6),\vec{\alpha}_3=(1,-3,-4,-7)$ 的一个极大无关组及秩.

2.（10 分）判定向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$的线性相关性。

3.（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，求矩阵 X，使 $XA=B$.

4.（1)（10 分）计算 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\&&\cdots\cdots&&\\b&b&b&\cdots&a\end{pmatrix}$的行列式$|A|$的值.

(2)（10 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1&x_2-m&x_3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}$

5. （10分）用初等行变换求$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\2&1&2\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$.

6. （30分） λ取何值时，方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解？

7. （30分）设矩阵 A=$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

（1）求 A 的特征值λ_1，λ_2，λ_3，且满足$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.

（2）求λ_1，λ_2，λ_3分别对应的一个特征向量.

（3）是否存在一个正交矩阵 T ，使 T'AT 成为对角形。若存在，把它求出来；若不存在，说明理由.

二、证明题。

1.（10 分）证明：如果向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关，则向量组$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$，$\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1$也线性无关.

2.（20 分）设η^*是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，$\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组的一个基础解系。试证：

(1) $\eta^*,\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$线性无关；

(2) $\eta^*,\eta^*+\xi_1,\dots\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关。