曲阜师范大学 2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：基础数学、应用数学、计算数学、概率论与数理统计、运筹学与控制论（控制论）

考试科目名称：高等代数 A

注意事项	
	1.试题共 2 页。
	2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。
	3.试题与答题纸一并交上。
	4.须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚。

一、填空、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 设 x_1,x_2,x_3 是多项式 x^3-6x^2+5x-1 的根,则 $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2=$__________。

2. n 阶矩阵 A 的行列式值为 c, k 是非零常数,则 $|(kA)^*|$ 等于__________。

3. 已知矩阵 A 的非常数不变因子为 $\lambda-1$, $(\lambda-1)(\lambda+1)$, $(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$,则 A 的若当标准形为__________。

4. 已知三级矩阵 A 的特征值为 1,-1,0, $B=A^2-2A+3E$，则 B^{-1} 的行列式为__________。

5. 实二次型半正定的充分必要条件是他的正惯性指数与__________相等.

6. 设 α,β,γ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，则行列式 $\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=$——。

7. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的一个特征值，则 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值之一是

   （A）$\lambda^{-1}|A|^n$　（B）$\lambda^{-1}|A|$　（C）$\lambda|A|$　（D）$\lambda|A|^n$

8. 设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵且都正定，则 AB 是

   （A）实对称矩阵　（B）正定矩阵　（C）可逆矩阵　（D）正交矩阵

9. 设 $m\times n$ 阶矩阵 A 的秩为 $m<n$，I_m 是 m 阶单位矩阵，下列结论正确的是

   （A）A 的任意 m 个列向量必线性无关　（B）A 的任意一个 m 阶子式不等于零

   （C）若矩阵 B 满足 $BA=0$，则 $B=0$　（D）A 通过初等行变换可以化为 $(I_m,0)$

10. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 都是两个 n 维向量组，且秩（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$）= 秩（$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$）$=r$,则

    （A）两个向量组等价。　（B）秩（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$）$=r$。

    （C）当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出时，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 也可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出。

    （D）当 $s=t$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价。

二、计算题（共 40 分）

1.（12 分）求矩阵 X ,使得: $X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 2 & 2\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2.（12 分）t 取什么值时,二次型 $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$ 正定。

3.（16 分）求齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0\\x_1+x_2-x_3\qquad\quad+x_5=0\end{cases}$ 的解空间(作为 R^5 的子空间)的一个标准正交基.

三、证明题(共 80 分):

1.（10 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $Ax=0$ 的解，即 $A\beta\neq 0$。证明向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_s$ 线性无关.

2.（12 分）设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $i=1,2,\cdots,s$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,两个线性方程组分别是

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}\quad\text{(I)}\qquad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\\b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0\end{cases}\quad\text{(II)}$$

证明:如果方程组 (I) 与 (II) 同解的充要条件是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 有相同的秩.

3.（13 分） 设 V 是欧氏空间,σ 是 V 的正交变换,证明:

(1) σ 是单射;

(2)若 $\dim V<\infty$,则 σ 是满射;

(3)若 $\dim V=\infty$,举例说明 σ 不是满射.

4.（15 分）设 V 是一个线性空间，V_1,V_2 是 V 的两个子空间，证明：下列三个条件中的任意两个成立，那么第三个一定成立：（I） $\dim V=\dim V_1+\dim V_2$；（II） $V=V_1+V_2$；（III） $V_1\cap V_2=\{0\}$。

5.（15 分）设 A,B 均为 n 阶方阵，证明 秩$(AB)\geq$秩$(A)+$秩$(B)-n$。

6.（15 分）若 A 是正定矩阵，则 A 的伴随矩阵 A^* 也是正定矩阵。