曲阜师范大学 2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：系统科学、系统分析与集成

考试科目名称：线性代数

注意事项	1.试题共 2 页。 2.答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题。 3.试题与答题纸一并交上。 4.须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答，字迹清楚。

一、叙述题（20 分）

1.（5 分）叙述不变子空间的定义。

2.（5 分）叙述哈密尔顿—凯莱定理。

3.（10 分）给出 3 种以上判断给定的矩阵是正定矩阵的判定定理。

二、计算题（90 分）

1.（10 分）计算下面行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

2.（15 分）设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

试求 A^{100}。

3.（15 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 &= 0, \\ 3x_1+2x_2+3x_3 &= -1, \\ -x_1+4x_2+mx_3 &= k, \end{cases}$$

问：m 和 k 为何值时，方程组无解，有惟一解，有无穷多组解？在有无穷多解时，求出其一般解。

4. (20 分) 设有 2 个三阶方阵：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}。$$

试分别求出 A 和 B 的特征值，并据此判断 A 和 B 是否相似？若相似，求出可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$。

5. (30 分) 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$$

试：

i) 写出二次型的矩阵表达式；

ii) 用正交变换化二次型为标准型，并写出相应的正交矩阵。

三、证明题 (40 分)

1. (10 分) 已知 n 阶实矩阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\ (k\le n)$ 对应的特征向量分别为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$，其中 $\lambda_i\ne\lambda_j$，$i\ne j, i,j=1,2,\cdots,k$。试证：向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 线性无关。

2. (10 分) 已知 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵。试证明：存在秩为 r 的 $m\times r$ 矩阵 B 和秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵 C，满足 A=BC。

3. (20 分) 设 A 为 m 阶实正定矩阵，B 为 $m\times n$ 实矩阵。试证：B^TAB 为正定矩阵的充要条件是秩(B)=n。