

# 曲阜师范大学 2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称: 运筹学与控制论 (运筹学方向)  
 考试科目名称: 数学分析 B

- |                  |                            |
|------------------|----------------------------|
| 注<br>意<br>事<br>项 | 1. 试题共 <u>2</u> 页。         |
|                  | 2. 答案必须写在答题纸上, 写明题号, 不用抄题。 |
|                  | 3. 试题与答题纸一并交上。             |
|                  | 4. 须用蓝、黑色钢笔或签字笔作答, 字迹清楚。   |

一. 计算 (共 4 小题, 每小题 10 分)

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$4. \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

二. (10 分)

证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } 0 \text{ 点连续, 但不可导.}$$

三. (10 分)

$$\text{证明 } \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in (-1, 1).$$

四. (15 分)

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导且  $f'(x) \leq M$ ,  $f(a) = 0$ , 证明

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{M}{2} (b-a)^2.$$

五. (15 分)

设  $a_n > 0$  且  $\{na_n\}$  有界, 试证  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛。

六. (15 分)

设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且对任意  $x, y$  有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,

计算  $\int_1^2 (x^2+1)f(x)dx$ 。

七. (15 分, 第 1 问 5 分, 第 2 问 10 分)

设  $f(x)$  在区间  $[-a, a]$  ( $a > 0$ ) 上具有二阶连续导数,  $f(0) = 0$ ,

(1) 写出  $f(x)$  带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式。

(2) 证明在  $(-a, a)$  上至少存在一点  $\eta$ , 使

$$a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

八. (20 分, 每问 10 分)

函数  $f(x)$  对于一切实数  $x$  满足微分方程

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$$

(1) 若  $f(x)$  在点  $x = C$  ( $C \neq 0$ ) 有极值, 试证它是极小值。

(2) 若  $f(x)$  在点  $x = 0$  有极值, 则它是极大值还是极小值?

九. (10 分)

求由曲线  $y = 4 - x^2$  及  $y = 0$  所围成的图形绕直线  $x = 3$  旋转一周所得旋转体的体积。