曲阜师范大学

2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称：基础数学；应用数学；概率论与数理统计；计算数学；运筹学与控制论（控制论方向）

考试科目名称：数学分析

注	1. 试题共 2 页.
意	2. **答案必须写在答题纸上，写明题号，不用抄题.**
事	3. 试题与答题纸一并交上.
项	4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔做答，字迹清楚.

一．判断题(正确的划√，错误的划×，每小题 2 分，共 20 分)

1. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上有 $\dfrac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = f(x)$.（　）

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 条件收敛,则必收敛.（　）

3. 若 $\{a_n\}$ 为单调数列, 则 $\{a_n\}$ 含有一个收敛子列的充要条件是 $\{a_n\}$ 收敛（　）

4. 若 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 取极值，则 $f_x(x_0,y_0)=0$， $f_y(x_0,y_0)=0$.（　）

5. 若 $f_{xy}(x_0,y_0), f_{yx}(x_0,y_0)$ 都存在,则一定相等.（　）

6. 若 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 可微,则 f_x, f_y 在 $P(x_0,y_0)$ 连续.（　）

7.若 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续,则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.（　）

8. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增,则 $f'(x)>0$.（　）

9. 收敛的无穷积分一定绝对收敛.（　）

10. 若 $\sqrt{f(x)} \in R[a,b]$，则 $f(x) \in R[a,b]$.（　）

二．计算下列各题（每题 10 分，共 70 分）

1. 求积分 $\int_L xy^2dy - x^2ydx, L$ 为以 a 为半径,圆心在原点的右半圆周从最上面一点 A 到

最下面一点 B；

2．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$；

3．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\pi}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2\pi}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n\pi}}\right)$

4．已知 $\begin{cases} x=f(t), \\ y=tf(t)-f(t), \end{cases}$ 其中 $f(t)$ 二阶可导，且 $f'(t)\neq 0$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

5．$\iiint\limits_V (xy+z^2)dxdydz$, 其中 $V=[-2,5]\times[-3,3]\times[0,1]$;

6．求积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\,(b>a>0)$.

7. 设 $f(x)$ 的原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(x)dx$

三．解答下列各题（每题 10 分共 60 分）

1．（1）叙述并证明函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的归结原则,（2）证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在；

2．判断 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的可微性；

3. 判别函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性；

4．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $ab>0$．证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi);$$

5．设 f 为 $(0,+\infty)$ 上的减函数且有下界,并且 f 在 $(0,+\infty)$ 的任一个子区间上可积，设

$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$．证明：$\{a_n\}$ 收敛.

6．证明：若 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$，且对每个正整数 n，$f_n(x)$ 在 X 上有界，则 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上一致有界