

曲阜师范大学 2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科专业名称: 理论物理 凝聚态物理 物理电子学 分子与原子物理 光学

考试科目名称: 《高等数学 A》

注 意 事 项	1. 试题共 <u>2</u> 页. 2. 答案必须写在专用答题纸上, 写明题号, 不用抄题. 3. 试题与答题纸一并交上. 4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答, 字迹清楚.
------------------	---

一. 填空题 (每题 4 分, 共 40 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 设 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 微分方程 $y'' + y' = 0$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}$

5. 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $A(1, 2, -2)$ 处的梯度为 $\text{grad} u|_A = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 设 A 为 3 阶方阵, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$ 为 A 的三个特征值, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

7. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都是单位向量, 且 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$

8. 设 $f(x) = x^2 (0 \leq x \leq 1)$, $S(x)$ 是 $f(x)$ 的正弦级数的和函数, 则 $S(\frac{5}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$

9. 广义积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$

10. 五阶实对称矩阵 A 的特征值是 $0, 2, 2, 3, 3$, 则矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$

二. 选择题 (每题 4 分, 共 20 分) (每题有且只有一个正确答案)

11. 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处 $\underline{\hspace{2cm}}$

- (A) 连续, 偏导数存在; (B) 连续, 偏导数不存在;
 (C) 不连续, 偏导数存在; (D) 不连续, 偏导数不存在.

12. 设直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 L ()

(A) 垂直于 π ; (B) 在 π 上; (C) 平行于 π ; (D) 与 π 斜交.

13. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处 ()

(A) 条件收敛; (B) 绝对收敛; (C) 发散; (D) 收敛性不能确定.

14. 函数 $\frac{1}{1+x} - (1-x)$ 与 x^α 当 $x \rightarrow 0$ 时为同阶无穷小量, 则 $\alpha =$ _____.

(A) $\alpha = 0$; (B) $\alpha = 1$; (C) $\alpha = 2$; (D) $\alpha = 3$.

15. $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ 的 _____ 点.

(A) 连续点; (B) 可去间断点; (C) 跳跃间断点; (D) 第二类间断点.

三. 按要求解答下列各题 (16-22 每题 10 分, 第 22 题 20 分, 共 90 分)

16. 计算 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$.

17. 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 所围图形的面积 S .

18. 计算第二型曲面积分 $I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 S 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 介于 $z=0$ 及 $z=3$ 之间的全表面的外侧.

19. 求 $f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 6x + 10y + 6$ 的极值.

20. 叙述并证明拉格朗日中值定理.

21. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, 向量 β 不是方程组 $AX = 0$ 的解, 即 $A\beta \neq 0$, 证明: 向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_r$ 线性无关.

22. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

23. 用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

为标准形, 并求相应的正交变换 $X = HY$.