山东师范大学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数与解析几何

注意事项：1. 本试卷共 9 道大题（共计 9 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4. 考试结束后将本卷装入试题袋内，不得带走，否则以违纪论处。

* *

高等代数部分

一.（15分）. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} \quad (x_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n)$$

二.（20分）. 用正交线性替换化二次型 $2x_1x_2+2x_3x_4$ 为标准形。

三.（25分）. 设 $\alpha_1=(1,2,-1,-2)$，$\alpha_2=(3,1,1,1)$，$\alpha_3=(-1,0,1,-1)$，$\beta_1=(2,5,-6,-5)$，$\beta_2=(-1,2,-7,3)$，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$。求 $V_1\cap V_2$ 及 V_1+V_2 的一组基，并判断 V_1+V_2 是否是直和。

四.(15分).

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

证明：$A^n=-A^{n-2}+A^2+E \quad (n\geq 3)$

五.(15分). 设V_1,V_2是数域P上n维线性空间V的两个真子空间，$V=V_1\dot{+}V_2$（直和）。证明：存在唯一的V的幂等线性变换$\mathcal{A}$（$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$），使$V_1=\mathcal{A}V$，$V_2=\mathcal{A}^{-1}(0)$（$\mathcal{A}$的核）。

六.(10分). $f(x)$是整系数多项式，k是正整数且k不整除$f(1)$，$f(2)$，…，$f(k)$。证明：$f(x)$无整数根。

解析几何部分.

七. 在由平面 $x+y-3z+2=0$ 和 $2x-2y-z+3=0$ 所确定的平面束中，求两个相互垂直的平面，其中一个平面过点$(1,1,2)$.(14分)

八. 求与两球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 和 $x^2+y^2+(z-5)^2=1$ 都相切的圆锥面方程.(20分)

九. 证明：二次曲线有奇异点的充要条件是其中心在曲线上.(16分)