山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：　　　　高等数学 B

注意事项：1. 本试卷共 9 道大题（共计 17 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4. 考试结束后将本卷装入试题袋内，不得带走，否则以违纪论处。

* *

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分，要求直接写出结果）

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 5 & -3 & 2\\ -1 & 4 & -3\end{bmatrix}$，则 $\det(A)=$ ______1______。

2. 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -5 & 4\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -5\end{bmatrix}$ 的乘积为 ______2______。

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=$ ______3______。

4. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{a^2+x}$ 的一阶近似公式为（$a>0$）______4______。

5. 向量 (a,b) 在平面上绕原点逆时针旋转角度 α 后坐标为______5______。

6. 初等函数的定义是______6______。

二、微分学计算题（本题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

1. 设 $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}+x^x$。计算导数 $f'(x)$。

2. 设 $u=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$。计算：$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$。

三、积分学计算题（本题共 2 小题，第 1 小题 12 分，第 2 小题 13 分，满分 25 分）

1. 设曲线方程为：$y=\sqrt{x\arctan x}$（$0\le x\le\sqrt{3}$）。试计算它围绕 X 轴旋转成立体的体积。

2. 计算下列重积分：$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$。其中 Ω 为曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 围成的区域。

四、（本题满分 10 分）求下列线性方程组的解：$AX=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

五、（本题满分 12 分）计算积分 $\iiint\limits_{V}xyzdxdydz$，其中 V 为球面 $x^2+y^2+z^2=1, x=0, y=0, z=0$ 所围成。

六、级数理论（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

1. 设函数 $f(x)=e^{\sin x}$。求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 展开，要求展开到 x^4。

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛域并计算其和。

七、（本题满分 15 分）分析下列两个二次型的正定性：

$$f=x_1^2+\frac{3}{2}x_2^2-2x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+4x_1x_3,\quad g=x_1^2+\frac{5}{4}x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_2x_3$$

八、（本题满分 14 分）计算下列矩阵的逆矩阵。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{bmatrix}$$

九、（本题满分 8 分）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可微，且 $f'(0)=f'(1)=0$。证明存在 $c\in(0,1)$ 满足 $f''(c)\ge 4|f(1)-f(0)|$。