

山东师范大学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：离散数学

- 注意事项：1. 本试卷共 8 道大题（共计 11 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4. 考试结束后将本卷装入试题袋内，不得带走，否则以违纪论处。

1. (20 分) 设 $A = \{A_i \mid i \in J\}$ 是一个集合族, B 是一个集合, 试判断下面四个集合

$$(1) B \cap \left(\bigcup_{i \in J} A_i \right) \quad (2) \bigcup_{i \in J} (B \cap A_i) \quad (3) B \cup \left(\bigcap_{i \in J} A_i \right) \quad (4) \bigcap_{i \in J} (B \cup A_i)$$

间的包含或相等关系并给与证明.

2. (20 分) 设 $A = \{a, b, c\}$, $\rho(A)$ 为 A 的幂集,

(1) 试证 $\langle \rho(A), \subseteq \rangle$ 为偏序集。

(2) 画出它的哈斯 (Hasse) 图

(3) 求出 $\{\{a\}, \{c\}\}$ 的上界、下界、上确界和下确界。

3. (20 分) 设 $A = \{x \mid x \in I_+, 1 \leq x \leq 9\}$, 其中 I_+ 为正整数集合, 在 $A \times A$ 上定义如下关系:

$$R: \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in R \text{ 当且仅当 } a + d = b + c.$$

试证明 R 为 $A \times A$ 上的等价关系, 并写出 $\langle 2, 5 \rangle$ 的等价类。

4. (20 分) 1) 求下式的主析取范式:

$$(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (\neg P \vee R)$$

2) 用逻辑推理规则证明:

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \vee \exists xQ(x).$$

5. (15 分) 设 $\langle H, \circ \rangle$ 和 $\langle K, \circ \rangle$ 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 的两个子群, 令 $HK = \{h \circ k \mid h \in H, k \in K\}$, 求证: $\langle HK, \circ \rangle$ 是 $\langle G, \circ \rangle$ 的子群的充分必要条件是 $HK = KH$ 。

6. (15 分) 设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$, 试证: 若 $g \circ f$ 为 X 上的恒等函数, 则 f 是入射, g 是满射。

7. (20 分) 试分析图 G 与其补图 \bar{G} 间连通性的关系, 并证明你的结论。

8. (20 分) G 为 m 条边的连通平面图, 其每个面至少由 k 条边围成 ($k \geq 3$), 试证其点数不少于 $2 + \frac{k-2}{k}m$ 。