山 东 师 范 大 学

05 硕士研究生入学考试试题

考试科目： 数学分析

注意事项：1．本试卷共 4 道大题（共计 18 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4．考试结束后将本卷装入试题袋内，不得带走，否则以违纪论处。

* *

一、 试判断下列结论的真伪，并说明理由． (24′, 每题 6′)

1．实数数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 发散的充分必要条件是： $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一定存在发散的子列．

2．设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=g(y_0)=x_0$, 则 $\lim\limits_{y\to y_0} f(g(y))=A$.

3．$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负连续可导有界, 且 $\int_0^{\infty} f(x)dx<+\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在有限.

4．设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 1, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}}=1$.

二、 简答题： (28′, 每题 7′)

1．用定义证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} \dfrac{x+y}{1+y}=1$.

2．求 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|dx$.

3．设 $F(x)=\int_{x^2}^{\cos x}(x-t)\cos t dt$, 求 $F'(x)$.

4．求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!(2n+1)}$.

三、 计算题： (60′, 每题 10′)

1．设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 非负单减且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n)^{\frac{1}{n}}$.

2. 求 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

3. 求 z_x, z_y, 其中 $z = z(x,y)$ 是 $f(xyz, x+y+z) = 0$ 所确定的隐函数.

4. 求 $\int\int_D \frac{3x}{y^2+xy^3} dxdy$, 其中 D 表示平面曲线 $xy=1$, $xy=3$, $y^2=x$, $y^2=3x$ 所围成的有界区域.

5. 求 $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

(π, 0)

6. 求 $\int_L (\sin x + y)dx + (x+y)dy$, 其中 L 沿 $(0,0)$ 到 $(0,\pi)$ 的正弦曲线.

四、 证明题:

1. $(10')$ 设 $x>0$, $y>0$. 证明: $\frac{x^n+y^n}{2} \geq (\frac{x+y}{2})^n$.

2. $(10')$ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积, 且具有原函数。证明: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

3. $(10')$ 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微,且 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, 证明: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = 0$.

4. $(8')$ 试讨论函数 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的连续性与可微性.