山东师范大学

硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等数学（A）

注意事项：1．本试卷共 九 道大题（共计 25 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4．考试结束后将本卷装入试题袋内，不得带走，否则以违纪论处。

* *

一. 填空题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1．设 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，且 $\vec{a}=\{3,-5,8\},\vec{b}=\{-1,1,x\}$，则 $x=$ ____①____.

2．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}\sin\dfrac{x}{\pi}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ____②____

3．设 $y=x^{\sin x}$，则 $dy=$ ____③____.

4．设函数 $f(x)$ 具有连续导数 $f'(x)$，且满足 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)\cos x+f'(x)\sin x]dx=3$，

则 $f(\frac{\pi}{2})=$ ____④____.

5. 二次积分 $\int_0^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx$ 交换积分次序后的二次积分为____⑤____

6. 微分方程 $y''-ay'=e^{bx}$ $(a,b$ 为实常数，且 $a\neq 0,b\neq 0)$，则

当 $a\neq b$ 时，该方程的形式特解 y^* 为____⑥____，

当 $a=b$ 时，该方程的形式特解 y^* 为____⑦____.（只要求写出特解形式，不必计算出特解.）

48 96 16 18 20

二. 单项选择题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某个领域内有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 点处连续的充分必要条件是 （ 1 ）

（A） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；　　（B） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$；

（C） $f(x_0+0)=f(x_0-0)$；　　（D）在 x_0 点的某个领域内，$f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

2. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的某领域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时 $\int_0^x f(t)\sin t dt$ 是 $\int_0^x t\varphi(t)dt$ 的 （ 2 ）

（A）低阶无穷小；（B）高阶无穷小；（C）同阶但不等价的无穷小；（D）等价的无穷小.

3. 曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与 x 交点的坐标是 （ 3 ）

（A） $(-1,0)$；　（B） $(-\frac{1}{6},0)$；　（C） $(1,0)$；　（D） $(\frac{1}{6},0)$.

4. $f(x),g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时有 （ 4 ）

（A） $\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$；　　（B） $\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(a)}{g(a)}$；

（C） $f(x)g(x)>f(b)g(b)$；　　（D） $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

5. 若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶偏导数，则下列结论正确的是 （ 5 ）

（A） 必有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$；　　（B） $f(x,y)$ 在 D 内必可微；

（C） $f(x,y)$ 在 D 内必连续；　　（D） $(A),(B),(C)$ 三个结论都不对.

6. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，它在 $(-1,1]$ 上定义为 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的以 2 为周期的付立叶级数在 $x=1$ 处收敛于 （ 6 ）

（A） 1；　（B） $\frac{3}{2}$；　（C） $\frac{1}{2}$；　（D） 2.

三. 计算下列各题：（本题共 6 小题，每小题 8 分，满分 48 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(x-2)+x+2}{\sin^3 x}$.

2. 设 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

3. 计算不定积分 $\int \arctan(1+\sqrt{x})dx$.

4. 设 $\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \end{cases}$, 而 $z=u^2v$, 求: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D 3x^2\sin^2 y dxdy$, 其中 D 为由 oy 轴与曲线段 $x=\cos y, -\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

6. 求微分方程 $2yy'=\dfrac{y^2-x}{x+1}$ 的通解.

四.（本题满分 8 分）设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内有定义，且在 a 点可导，求 $f'(0)$.

五.（本题满分 8 分）判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ 的敛散性，若收敛判断其条件收敛还是绝对收敛.

六.（本题满分 9 分）设 $u=f(x-y,y-z,t-z)$, f 分别关于 x,y,z,t 具有二阶连续偏导数，

（1） 证明: $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$.

（2） 计算 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

七.（本题满分 9 分）求由平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0, \end{cases}$ 绕 OZ 轴旋转一周所形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的立体的体积.

八.（本题满分 10 分）已知 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^{2x} xf(t)dt+2\int_x^0 tf(2t)dt=2x^3(x-1)$, 求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值与最小值.

九.（本题满分 10 分）如图 1，位于坐标原点的我舰向位于 ox 轴上 $A(1,0)$ 点处的敌舰发制导鱼雷，使鱼雷永远对准敌舰，设敌舰以最大速度 v_0 沿平行于 oy 轴的直线行驶，又设鱼雷的速率大小是 $5v_0$，试列出鱼雷的行驶曲线所满足的微分方程.

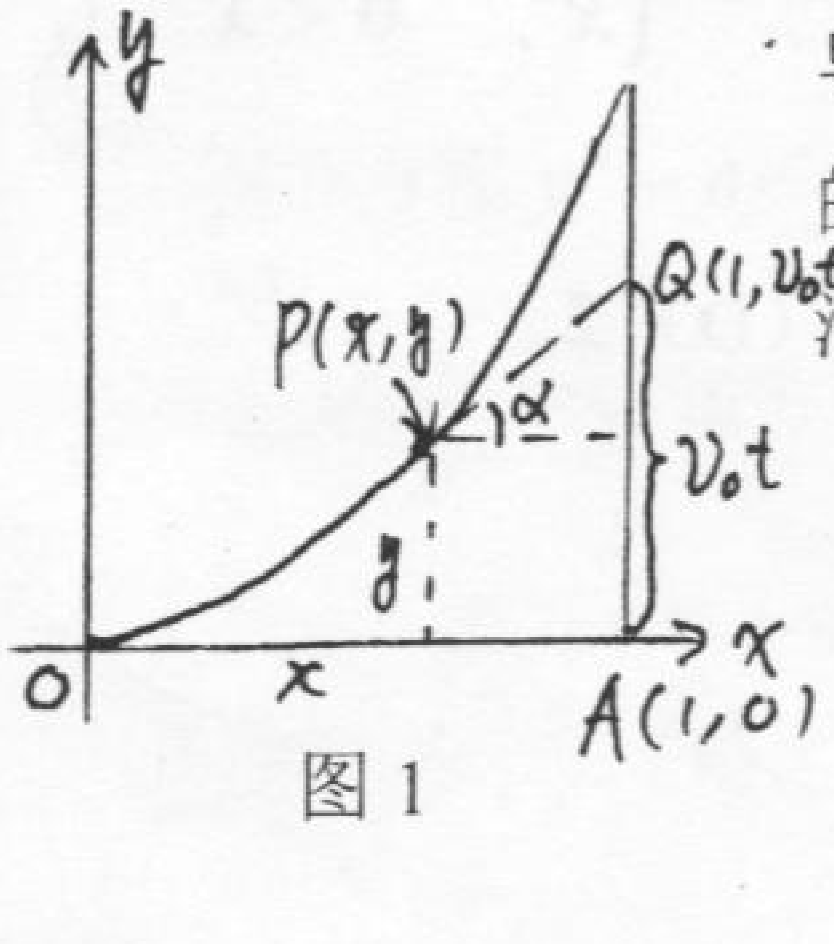

图 1