

# 山东师范大学

## 硕士研究生入学考试试题

考试科目:

高等数学 B

- 注意事项: 1. 本试卷共 9 道大题 (共计 17 个小题), 满分 150 分;  
2. 本卷属试题卷, 答题另有答题卷, 答案一律写在答题卷上, 写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁, 不要在试卷上涂划;  
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题, 其它均无效。  
4. 考试结束后将本卷装入试题袋内, 不得带走, 否则以违纪论处。

\*\*\*\*\*

### 一、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分, 要求直接写出结果)

1. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ , 则  $\det(A) = \underline{\textcircled{1}}$ 。

2. 矩阵  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  的乘积为  $\underline{\textcircled{2}}$ 。

3. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}) = \underline{\textcircled{3}}$ 。

4. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sqrt{a^2 + x}$  的一阶近似公式为 ( $a > 0$ )  $\underline{\textcircled{4}}$ 。

5. 向量  $(2, 1)$  在平面上绕原点逆时针旋转角度  $\alpha$  后坐标为  $\underline{\textcircled{5}}$ 。

6. 初等函数的定义是  $\underline{\textcircled{6}}$ 。

### 二、微分学计算题 (本题共 2 小题, 每小题 10 分, 满分 20 分)

1. 设  $f(x) = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$ 。计算导数  $f'(x)$ 。

2. 设函数  $\Phi(u, v)$  是变量  $u, v$  的任意可微分函数,  $a, b$  为常数,  $z = z(x, y)$  由方程  $\Phi(x - az, y - bz) = 0$  定义。计算表达式:  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y}$ 。



三、积分学计算题（本题共 2 小题，第 1 小题 12 分，第 2 小题 13 分，满分 25 分）

1. 设曲线方程为： $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$  ( $0 \leq x \leq \pi$ )。试计算它围绕 X 轴旋转成立体的体积。

2. 计算下列重积分：
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+24}} dx dy。$$

四、（本题满分 10 分）求下列线性方程组的解

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

五、（本题满分 12 分）计算积分  $\iint_S \left( \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z} \right)$ ，其中  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ )，积分沿曲面的外侧进行。

六、级数理论（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

1. 设函数  $f(x) = e^{2x-x^2}$ 。求  $f(x)$  在  $x=0$  的 Taylor 展开，要求展开到  $x^4$ 。

2. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$  的收敛域并计算其和。

七、（本题满分 15 分）分析下列两个二次型的正定性：

$$f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3, \quad g = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$$

八、（本题满分 14 分）计算下列矩阵的逆矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

九、（本题满分 8 分）设  $f(x)$  在区间  $[0,1]$  上二阶可微，且  $f'(0) = f'(1) = 0$ 。证明存在  $c \in (0,1)$  满足  $f''(c) \geq 4|f(1) - f(0)|$ 。