山东师范大学
硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析与高等代数

注意事项：1．本试卷共 12 道大题（共计　　个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4．考试结束后将本卷装入试题袋内，不得带走，否则以违纪论处。

* *

1. 设 $f(x)\in P[x]$. 证明：若 $(f'(x), f''(x))=1$，则 $f(x)$ 的重因式都是 $f(x)$ 的二重因式.（10分）

2. 证明以下命题：（10分）

(1) 若 A, B 为同级方阵，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\cdot|A-B|$.

(2) 设 $R=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 是分块矩阵，其中 A 是 n 级可逆阵. R 的秩等于 n 当且仅当 $D-CA^{-1}B=0$.

3. 已知 4 级方阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$，其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$. 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $AX=\beta$ 的通解.（10分）

4. 设 A 是 n 级正定阵，B 是 n 级实对称阵，E 为 n 级单位阵. 证明：存在可逆阵 C，使 $C'AC=E$，$C'BC=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $A^{-1}B$ 的特征值.（20分）

5. 设 $\mathbb{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 证明: $\mathbb{A}^2$ 的秩等于 $\mathbb{A}$ 的秩当且仅当 $\mathbb{A}V \cap \mathbb{A}^{-1}(0) = \{0\}$. (15分)

6. 设 $\mathbb{A}$ 为欧氏空间 V 的一个变换. 证明: 若 $\mathbb{A}$ 保持内积不变(即对所有的 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\mathbb{A}\alpha, \mathbb{A}\beta) = (\alpha, \beta)$), 则 $\mathbb{A}$ 一定是线性变换. (10分)

7. 设 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在, 并求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. (15分)

8. 求极限: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. (10分)

9. 求不定积分 $\int (x\cos x - \operatorname{arctg} x)\, dx$. (10分)

10. 计算累次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \dfrac{y}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$. (10分)

11. 设 $p(x)$ 为多项式函数. 试证明: 若方程 $p'(x) = 0$ 没有实数根, 则 $p(x) = 0$ 至多有一个实数根. (20分)

12. 试证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{x + 3^n}$ 在 $(-3, +\infty)$ 上一致收敛. (10分)