山东师范大学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

注意事项：1. 本试卷共 七 道大题（共计 17 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一.（12分）求下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}}\right)$.

2. 设 $f(0)=0$，$f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}$.

二.（12分）求下列函数的导数或微分

1. 设函数 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$，求 $f'(x)$.

2. 设函数 $u=f(xz,\frac{y}{z})$，求 du.

三.（50分）计算下列各题

1. $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

2. $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dxdy$，其中D是由 $x=0$，$y=0$，$x+y=1$ 所围成的区域.

3. $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$.

4. $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos^2x\,dx\ (a>0)$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$.

6. $\iint_S(x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1)\,dS$，其中$S$是锥面$x^2+y^2=z^2\ (z\geq0)$被圆柱面$x^2+y^2=2z$截取的部分.

四.(8分)将函数$\frac{x+1}{x-1}$在$x=2$处展成幂级数.

五.(8分)求函数$f(x)=|x(x^2-1)|$的极值点.

六.(30分)讨论下列各题

1. 试确定函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}$的收敛域，并讨论其和函数在收敛域上的连续性.

2. 试讨论$\int_0^{+\infty}\frac{(e^{\sin x}-1)\sin(2x^2)}{x^\lambda}dx\ (\lambda>0)$的敛散性.

七.证明下列各题(30分)

1. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 试证明存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得

$$\xi f'(\xi)=-f(\xi).$$

2. 试证明数列$\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$单调减.

3. 设$\{u_n(x)\}$为$[a,b]$上的可导函数列,且存在常数$M>0$,使得对$\forall x\in[a,b]$, $\forall n\geq 1$有$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k'(x)\right|\leq M$. 试证明若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上收敛,则必为一致收敛.