山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数与解析几何

注意事项：1. 本试卷共 9 道大题（共计　　个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

高等代数部分

一、（ 15 分）计算 n 级行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

二、（ 15 分）若 V_1 是欧氏空间 V 的一个子空间，则 $V = V_1 \dotplus V_1^{\perp}$（直和），于是 V 中任一向量 α 可唯一分解为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_1^{\perp}$，称 α_1 为 α 在 V_1 上的内射影.

设 R_1 为欧氏空间 R^4 的由 $\alpha_1 = (2,1,1,-1)$， $\alpha_2 = (1,1,3,0)$ 生成的子空间，求向量 $\alpha = (7,4,4,2)$ 在 R_1 上的内射影.

三、（ 20 分）给出将 $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ 化为标准形的正交线性替换.

四、（ 20 分）设 $A = (a_{ij})$ 是一个 m 行 n 列的矩阵. 证明：A 的秩至多为 1 的

充分必要条件是有一个列向量 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ 与一个行向量 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 使得 $A = XY$.

五、（15 分）设 $\mathbf{A}$ 是有限维线性空间 V 的一个线性变换．证明：对于 V 的任意一个子空间 W，有

$$\mathbf{AW}\text{的维数} + (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{0}) \cap \mathbf{W})\text{的维数} = \mathbf{W}\text{的维数}.$$

六、（15 分）设 $f(x)$ 是整系数多项式，a_1, a_2, a_3, a_4 是互不相同的整数，$f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4) = 1$. 证明：对任意的整数 n，$f(n) - 1$ 不是素数.

解析几何部分

七、（20 分）求单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 过点 $(1, 3, 3)$ 的两条直母线所决定的平面的方程。

八、（15 分）求圆锥面 $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ 的平行于平面 $x + y + 1 = 0$ 的直母线的方程。

九、（15 分）设有共焦点的曲线族 $\frac{x^2}{a^2+h} + \frac{y^2}{b^2+h} = 1$，这里 h 是一个变动的参数，作平行于已知直线 $y = mx$ 的曲线的切线，求这些切线切点的轨迹方程（假设 $a \neq b$）.